数学Ⅱ・B　第 3 問

(1)　表 1 から，確率変数 X の平均 m は　　$m=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$　　（ア ⓪）

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，$n=300$ は十分に大きいから，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。　（イ ③）

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$ から

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\left\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots\cdots+(X_n-\overline{X})^2\right\}\\&=\frac{1}{n}\left\{({X_1}^2+{X_2}^2+\cdots\cdots+{X_n}^2)-2(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)\overline{X}+n(\overline{X})^2\right\}\\&=\frac{1}{n}\left\{({X_1}^2+{X_2}^2+\cdots\cdots+{X_n}^2)-2\cdot n\overline{X}\cdot\overline{X}+n(\overline{X})^2\right\}\\&=\frac{1}{n}\left\{({X_1}^2+{X_2}^2+\cdots\cdots+{X_n}^2)-n(\overline{X})^2\right\}\\&=\frac{1}{n}({X_1}^2+{X_2}^2+\cdots\cdots+{X_n}^2)-(\overline{X})^2\end{aligned}$$

よって，標本の標準偏差 S は　　$S=\sqrt{\dfrac{1}{n}({X_1}^2+{X_2}^2+\cdots\cdots+{X_n}^2)-(\overline{X})^2}$　　（ウ ①）

ここで，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について，$X_i=1$ または $X_i=0$ であるから

$${X_i}^2=X_i\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

が成り立つ。

したがって　　$S=\sqrt{\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)-(\overline{X})^2}$

$$=\sqrt{\overline{X}-(\overline{X})^2}=\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}$$　　（エ ②）

ここで，標本の大きさ $n=300$ は十分に大きいから，母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いることができる。

このことから，母平均 m の信頼度 95 %の信頼区間は，正規分布表より

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{S}{\sqrt{300}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\frac{S}{\sqrt{300}}$$

表 2 から　　$\overline{X}=\dfrac{1\cdot75+0\cdot225}{300}=\dfrac{75}{300}=\dfrac{1}{4}=0.25$

よって　　$S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

したがって　$\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{S}{\sqrt{300}}=0.25-1.96\cdot\dfrac{1}{\sqrt{300}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$$=0.25-1.96\cdot\frac{1}{10\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=0.25-0.049=0.201$$

$$\overline{X}+1.96\cdot\frac{S}{\sqrt{300}}=0.25+0.049=0.299$$

ゆえに，母平均 m の信頼度 95 %の信頼区間は　　$0.201\leqq m\leqq 0.299$　　（オ ⓪）

(2) $p=\frac{1}{4}$ であるから，$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$ について　$P(X_j=1)=\frac{1}{4}$，$P(X_j=0)=\frac{3}{4}$

また，$X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_k$ は互いに独立である。

$k=4$ のとき，$U_4=1$ または $U_4=0$ である。

表 3 から，$U_4=1$ となる $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)$ の組は

$$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 1)$$

これらの組になる確率はともに　$\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{256}$

よって　$P(U_4=1)=\frac{3}{256}\cdot 2=\frac{3}{128}$

$P(U_4=0)=1-P(U_4=1)$ であるから

$$E(U_4)=1\cdot\frac{3}{128}+0\cdot\left(1-\frac{3}{128}\right)=\frac{^{カ}3}{128}$$

$k=5$ のとき，$U_5=1$ または $U_5=0$ である。

$U_5=1$ となる $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)$ の組は

$$\begin{aligned}&(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)\\&=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),\\&\quad(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)\end{aligned}$$

$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$ のとき

これらの組になる確率は 3 組すべて　$\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{1024}$

$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$ のとき

これらの組になる確率はともに　$\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{1024}$

よって　$P(U_5=1)=\frac{9}{1024}\cdot 3+\frac{3}{1024}\cdot 2=\frac{33}{1024}$

$P(U_5=0)=1-P(U_5=1)$ であるから

$$E(U_5)=1\cdot\frac{33}{1024}+0\cdot\left(1-\frac{33}{1024}\right)=\frac{^{キク}33}{1024}$$

xy 平面上で，点 $\left(4,\ \frac{3}{128}\right)$ と点 $\left(5,\ \frac{33}{1024}\right)$ を通る直線の方程式は

$$y-\frac{3}{128}=\left(\frac{33}{1024}-\frac{3}{128}\right)(x-4)$$

すなわち　$y=\frac{9}{1024}(x-4)+\frac{3}{128}$

点 $(300,\ E(U_{300}))$ はこの直線上の点であるから

$$E(U_{300})=\frac{9}{1024}\cdot 296+\frac{3}{128}=\frac{336}{128}=\frac{^{ケコ}21}{^{サ}8}$$