数学Ⅱ・B　第 2 問

(1)　(i)　$f(x)=3(x-1)(x-2)=3x^2-9x+6$ から　　$f'(x)=6x-9$

$f'(x)=0$ とすると　　$6x-9=0$　　　　よって　　$x=\dfrac{{}^{ア}3}{{}^{イ}2}$

(ii)　　$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

$=\displaystyle\int_0^x (3t^2-{}^{ウ}9t+{}^{エ}6)\,dt=\left[t^3-\dfrac{9}{2}t^2+6t\right]_0^x$

$=x^3-\dfrac{{}^{オ}9}{{}^{カ}2}x^2+{}^{キ}6x$

$S'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$

$S'(x)=0$ とすると

$x=1,\ 2$

$S(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$S(x)$ は $x={}^{ク}1$ で極大値 $1^3-\dfrac{9}{2}\cdot1^2+6\cdot1=\dfrac{{}^{ケ}5}{{}^{コ}2}$,

$x={}^{サ}2$ で極小値 $2^3-\dfrac{9}{2}\cdot2^2+6\cdot2={}^{シ}2$　をとる。

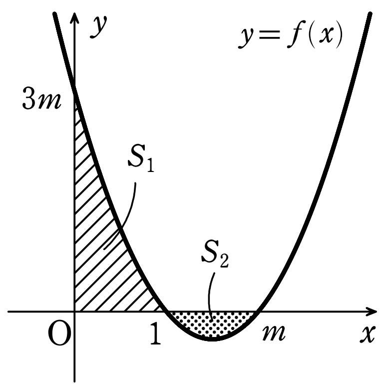
(iii)　$S'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=f(x)$ であるから　　$f(3)=S'(3)$

$S'(3)$ は関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ S(3))$ における接線の傾きを表すから

^{ス}③

(2)　$f(x)=0$ とすると，$3(x-1)(x-m)=0$ から

$x=1,\ m$　$(m>1)$



S_1 は右の図の斜線部分の面積であるから

$S_1=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$　$({}^{セ}⓪)$

S_2 は右の図の網目部分の面積であるから

$S_2=\displaystyle\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$　$({}^{ソ}⑤)$

$S_1=S_2$ となるとき　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$

すなわち　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=-\int_1^m f(x)\,dx$

よって　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^m f(x)\,dx=0$

ゆえに　　$\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx=0$　$({}^{タ}①)$

ここで，(1) と同様に

$S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-m)$

$S'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ m$

$S(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	m	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$S_1=S_2$ が成り立つとき　　$S(m)=\int_0^m f(x)dx=0$

ゆえに，$y=S(x)$ のグラフの概形は図 1 のようになる。　(チ ①)

また，$S_1>S_2$ が成り立つとき，$\int_0^1 f(x)dx>\int_1^m\{-f(x)\}dx$ から　　$\int_0^m f(x)dx>0$

よって　　$S(m)=\int_0^m f(x)dx>0$

ゆえに，$y=S(x)$ のグラフの概形は図 2 のようになる。　(ツ ②)

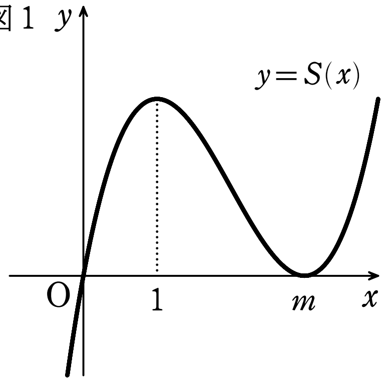
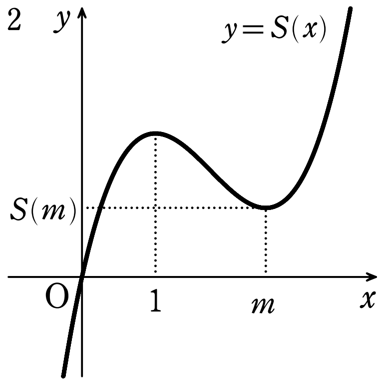
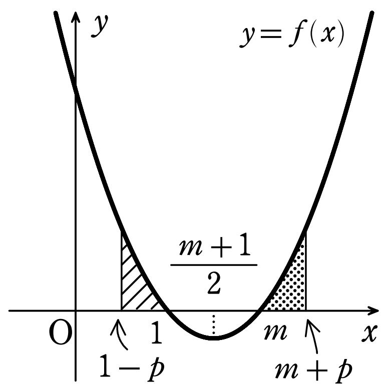
図 1


図 2


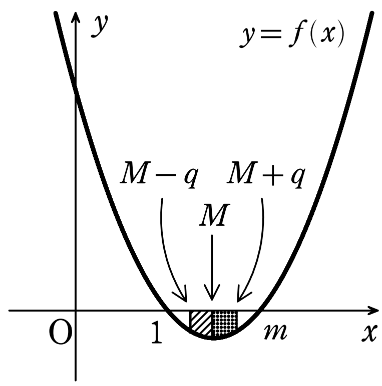
(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフは，直線 $x=\dfrac{m+1}{2}$ を軸とする放物線であるから，直線 $x=\dfrac{m+1}{2}$ に関して対称である。　(テ ③)



よって，すべての正の実数 p に対して，右の図の斜線部分と網目部分の面積は等しいから

$$\int_{1-p}^{1} f(x)dx=\int_m^{m+p} f(x)dx \quad \cdots\cdots ①$$　(ト ④)

同様に，$M=\dfrac{m+1}{2}$ とおくと，$0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して，右の図の斜線部分と網目部分の面積は等しいから



$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}dx=\int_M^{M+q}\{-f(x)\}dx \quad \cdots\cdots ②$$

(ナ ②)

ここで，すべての実数 α，β に対して，

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_0^\beta f(x)dx-\int_0^\alpha f(x)dx=S(\beta)-S(\alpha)$$

が成り立つから，① より　　$S(1)-S(1-p)=S(m+p)-S(m)$

すなわち　　$S(1-p)+S(m+p)=S(1)+S(m)$　(ニ ⓪)

同様に，$\int_\alpha^\beta\{-f(x)\}dx=-\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\{S(\beta)-S(\alpha)\}$ が成り立つから，② より

$$-\{S(M)-S(M-q)\}=-\{S(M+q)-S(M)\}$$

すなわち　　$2S(M)=S(M+q)+S(M-q)$　(ヌ ④)

よって，2 点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$ を結ぶ線分の中点の座標は

$$\left(\frac{(1-p)+(m+p)}{2},\ \frac{S(1-p)+S(m+p)}{2}\right)$$

すなわち　$\left(\dfrac{1+m}{2},\ \dfrac{S(1)+S(m)}{2}\right)$

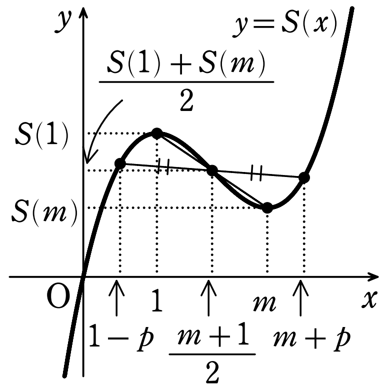
これは p の値によらず 1 つに定まる。

さらに，$2S(M)=S(M+q)+S(M-q)$ において，$q=M-1$ とすると

$$2S(M)=S(2M-1)+S(1)$$

$M=\dfrac{m+1}{2}$ であるから　$2S\left(\dfrac{m+1}{2}\right)=S(m)+S(1)$

よって　$\dfrac{S(1)+S(m)}{2}=S\left(\dfrac{m+1}{2}\right)$



ゆえに，中点の座標は $\left(\dfrac{m+1}{2},\ S\left(\dfrac{m+1}{2}\right)\right)$ と表されるから，その中点は関数 $y=S(x)$ のグラフ上にあることがわかる。

以上から，すべての正の実数 p に対して，2 点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$ を結ぶ線分の中点は，p の値によらず 1 つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。　（ネ ②）

$\boxed{\text{参考}}$　$0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対し，2 点 $(M-q,\ S(M-q))$，$(M+q,\ S(M+q))$ を結ぶ線分の中点も，q の値によらず 1 つに定まり，その中点は関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある点 $(M,\ S(M))$ であることがわかる。

したがって，3 次関数 $y=S(x)$ のグラフは，点 $\left(\dfrac{m+1}{2},\ S\left(\dfrac{m+1}{2}\right)\right)$ に関して対称である。