数学Ⅱ・B　第１問〔2〕

(1)　$S(x)=0$ すなわち $x^2+4x+7=0$ を解くと

$$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot 7}={}^{コサ}-2\pm\sqrt{{}^{シ}3}\,i$$

$P(x)=2x^3+7x^2+10x+5$ を $S(x)=x^2+4x+7$ で割ったときの商 $T(x)$ は

$$T(x)={}^{ス}2x-{}^{セ}1$$

余り $U(x)$ は

$$U(x)={}^{ソタ}12$$

$$\begin{array}{r}
2x-1 \\
x^2+4x+7\,\overline{)\,2x^3+7x^2+10x+5} \\
\underline{2x^3+8x^2+14x} \\
-x^2-4x+5 \\
\underline{-x^2-4x-7} \\
12
\end{array}$$

(2)　(i)　余り $U(x)$ が定数になるとき，定数 k を用いて $U(x)=k$ とおくと

$$P(x)=S(x)T(x)+k$$

また，方程式 $S(x)=0$ が異なる 2 つの解 α，β をもつとき　　$S(\alpha)=S(\beta)=0$

これらのことから　　$P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+k=k$

$P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+k=k$

すなわち　　$P(\alpha)=P(\beta)=k$　$\left({}^{チ}③\right)$

したがって，余りが定数になるとき，$P(\alpha)=P(\beta)$ が成り立つ。$\left({}^{ツ}①\right)$

(ii)　逆に，$P(\alpha)=P(\beta)$ が成り立つとき，余りが定数になるかを考える。

$S(x)$ は 2 次式であるから，余りは 1 次式または定数であり，定数 m，n を用いて $U(x)=mx+n$ とおける。

このとき　　$P(x)=S(x)T(x)+mx+n$　$\left({}^{テ}①\right)$

この等式に $x=\alpha$，$x=\beta$ を代入すると，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ であるから

$$P(\alpha)=m\alpha+n\quad かつ\quad P(\beta)=m\beta+n\quad \left({}^{ト}①\right)$$

$P(\alpha)=P(\beta)$ であるから　　$m\alpha+n=m\beta+n$　　　すなわち　　$m(\alpha-\beta)=0$

$\alpha\neq\beta$ であるから　　$m=0$　$\left({}^{ナ}③\right)$

よって，$U(x)=n$ になるから，$P(\alpha)=P(\beta)$ が成り立つとき，余りは定数になる。

(i)，(ii) から，方程式 $S(x)=0$ が異なる 2 つの解 α，β をもつとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $P(\alpha)=P(\beta)$ であることは同値である。

(3)　$S(x)=0$ すなわち $x^2-x-2=0$ を解くと　　$x=-1，2$

(2) から，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき　　$P(-1)=P(2)$

ここで　　$P(-1)=(-1)^{10}-2\cdot(-1)^9-p\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)=8-p$

$P(2)=2^{10}-2\cdot 2^9-p\cdot 2^2-5\cdot 2=-4p-10$

よって　　$8-p=-4p-10$

ゆえに　　$p={}^{ニヌ}-6$

余りは $P(-1)$ であるから　　$P(-1)=8-(-6)={}^{ネノ}14$

$\boxed{参考}$　(2) の結論を用いなくても次のように解答できる。

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき，商 $T(x)$ と定数 n を用いて

$$P(x)=(x^2-x-2)T(x)+n$$

と表される。

$P(-1)=8-p$，$P(2)=-4p-10$ であるから

$$8-p=n,\quad -4p-10=n$$

これを解くと　　$p=^{ニヌ}-6$，$n=^{ネノ}14$