数学Ⅱ・B　第 1 問〔1〕

(1)　(i)　$y=\log_3 x$ に $x=27$ を代入すると

$$y=\log_3 27=\log_3 3^3=3$$

よって，$y=\log_3 x$ のグラフは点 $(27,\ ^{ア}3)$ を通る。

また，$y=\log_2 \dfrac{x}{5}$ に $y=1$ を代入すると　　$1=\log_2 \dfrac{x}{5}$

ゆえに，$\dfrac{x}{5}=2$ であるから　　$x=10$

したがって，$y=\log_2 \dfrac{x}{5}$ のグラフは点 $(^{イウ}10,\ 1)$ を通る。

(ii)　$k>0$，$k\fallingdotseq 1$ のとき，$y=\log_k x$ に $x=1$ を代入すると　　$y=\log_k 1=0$

よって，$y=\log_k x$ のグラフは，k の値によらず定点 $(^{エ}1,\ ^{オ}0)$ を通る。

(iii)　$k=2,\ 3,\ 4$ のときの $y=\log_k x$ のグラフの概形を考える。

(ii) から，$y=\log_k x$ のグラフは k の値によらず定点 $(1,\ 0)$ を通る。

また，$x\fallingdotseq 1$ のとき，$y=\log_k x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 k}$ と表される。

$\dfrac{1}{\log_2 4}<\dfrac{1}{\log_2 3}<\dfrac{1}{\log_2 2}$ であるから，

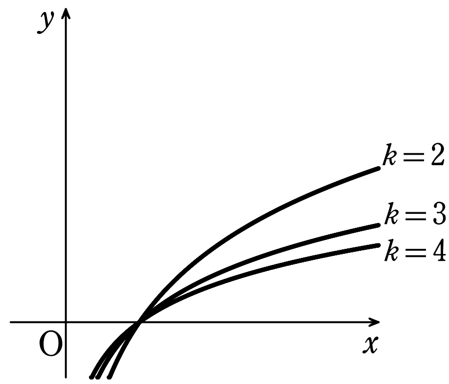
$\log_2 x>0$ すなわち $x>1$ のとき

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 4}<\frac{\log_2 x}{\log_2 3}<\frac{\log_2 x}{\log_2 2}$$

よって，$x>1$ のとき

$$\log_4 x<\log_3 x<\log_2 x$$

ゆえに，$k=2,\ 3,\ 4$ のときの $y=\log_k x$ のグラフの概形は右の図のようになる。(カ ⓪)



参考　$y=\log_k x$ のグラフが k の値によらず定点 $(1,\ 0)$ を通ることと，$y=p$ であるときの x の値の大小を考えてグラフの概形を判断してもよい。

(ii) から，$y=\log_k x$ のグラフは k の値によらず定点 $(1,\ 0)$ を通る。

また，0 より大きい実数 p に対して，$y=p$ であるときの x の値を考えると

$k=2$ のとき，$p=\log_2 x$ であるから

$$x=2^p$$

$k=3$ のとき，$p=\log_3 x$ であるから

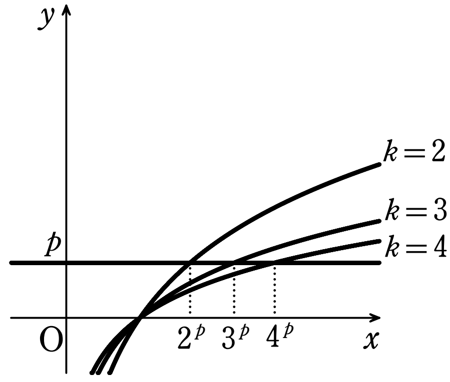
$$x=3^p$$

$k=4$ のとき，$p=\log_4 x$ であるから

$$x=4^p$$

$p>0$ であるから　　$2^p<3^p<4^p$

よって，$k=2,\ 3,\ 4$ のときの $y=\log_k x$ のグラフの概形は　カ ⓪

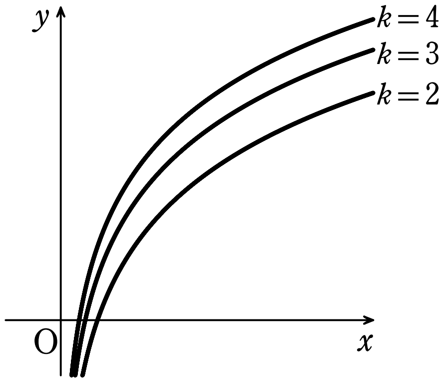


$k=2,\ 3,\ 4$ のときの $y=\log_2 kx$ のグラフの概形を考える。

$x>0$ のとき，$2x<3x<4x$ であるから

$$\log_2 2x<\log_2 3x<\log_2 4x$$

したがって，$k=2,\ 3,\ 4$ のときの $y=\log_2 kx$ のグラフの概形は右の図のようになる。(キ ⑤)



参考　$y=\log_2 kx$ のグラフが k の値によらず通る定点をもたないことと，$y=\log_2 kx$ のグラフと x 軸の交点を考えてグラフの概形を判断してもよい。

$\log_2 kx=\log_2 k+\log_2 x$ であるから，$k\neq 1$ のとき，$y=\log_2 kx$ のグラフは k の値によらず通る定点をもたない。

また，$y=0$ とすると，$kx=1$ から，$y=\log_2 kx$ のグラフは点 $\left(\frac{1}{k},\ 0\right)$ を通る。

ゆえに，$k=2,\ 3,\ 4$ のとき，それぞれ点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，点 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$，点 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$ を通る。

よって，$k=2,\ 3,\ 4$ のときの $y=\log_2 kx$ のグラフの概形は　キ ⑤

(2)　(i)　$\log_x y=2$ から　　$y=x^2$

よって，方程式 $\log_x y=2$ の表す図形は放物線 $y=x^2$ の $x>0$，$x\neq 1$，$y>0$ の部分。(ク ②)

(ii)　$0<\log_x y<1$ から　　$\log_x 1<\log_x y<\log_x x$

ゆえに，$0<x<1$ のとき　　$x<y<1$

$x>1$ のとき　　$1<y<x$

これらの不等式の表す領域を図示すると，右の図の斜線部分になる。ただし，境界線は含まない。(ケ ②)