数学Ⅰ･A　第４問

(1)　右の計算から，10 進数 40 を 6 進数で表すと　$104_{(6)}$

$$\begin{array}{r|l} 6\,) & 40 \quad \text{余り} \\ 6\,) & 6 \;\cdots\; 4 \\ 6\,) & 1 \;\cdots\; 0 \\ & 0 \;\cdots\; 1 \end{array}$$

よって，Ｔ6 は [アイウ]104 と表示される。

また，$10011_{(2)}$ を 10 進数で表すと

$$10011_{(2)} = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$
$$= 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 19$$

右の計算から，10 進数 19 を 4 進数で表すと　$103_{(4)}$

$$\begin{array}{r|l} 4\,) & 19 \quad \text{余り} \\ 4\,) & 4 \;\cdots\; 3 \\ 4\,) & 1 \;\cdots\; 0 \\ & 0 \;\cdots\; 1 \end{array}$$

ゆえに，Ｔ4 は [エオカ]103 と表示される。

(2)　Ｔ4 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは，4 進数で $1000_{(4)}$ 秒後である。

すなわち　$1000_{(4)} = 1\cdot 4^3 + 0\cdot 4^2 + 0\cdot 4^1 + 0\cdot 4^0 =$ [キク]64 (秒後)　……①

同様に，Ｔ6 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは，6 進数で $1000_{(6)}$ 秒後である。すなわち　$1000_{(6)} = 1\cdot 6^3 + 0\cdot 6^2 + 0\cdot 6^1 + 0\cdot 6^0 = 216$ (秒後)　……②

ここで，$64 = 2^6$，$216 = 2^3\cdot 3^3$ であるから，64 と 216 の最小公倍数は　$2^6\cdot 3^3 = 1728$

したがって，Ｔ4 とＴ6 を同時にスタートさせた後，初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは　[ケコサシ]1728 秒後

(3)　(スセ)，(ソ)　$012_{(4)}$ を 10 進数で表すと　$012_{(4)} = 0\cdot 4^2 + 1\cdot 4^1 + 2\cdot 4^0 = 0 + 4 + 2 = 6$

① より，ある 3 桁の数がＴ4 に表示されてから，64 秒後に同じ数が表示されるから，Ｔ4 をスタートさせた l 秒後にＴ4 が 012 と表示されることと，l を [スセ]64 で割った余りが [ソ]6 であることは同値である。

(タチツ)　Ｔ3 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは，3 進数で $1000_{(3)}$ 秒後であるから　$1000_{(3)} = 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 0\cdot 3^0 = 27$ (秒後)

さらに，$012_{(3)}$ を 10 進数で表すと　$012_{(3)} = 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 = 3 + 2 = 5$

ゆえに，Ｔ3 をスタートさせた l 秒後にＴ3 が 012 と表示されることと，l を 27 で割った余りが 5 であることは同値である。

よって，Ｔ3 とＴ4 を同時にスタートさせてから，012 と表示されるまでの時間はそれぞれＴ3：$27a + 5$，Ｔ4：$64b + 6$ (a，b は 0 以上の整数) と表される。

$27a + 5 = 64b + 6$ とすると　$27a - 64b = 1$　……③

ここで，27 と 64 に互除法の計算を行うと

$$\begin{array}{lll} 64 = 27\cdot 2 + 10 & \text{移項して} & 10 = 64 - 27\cdot 2 \\ 27 = 10\cdot 2 + 7 & \text{移項して} & 7 = 27 - 10\cdot 2 \\ 10 = 7\cdot 1 + 3 & \text{移項して} & 3 = 10 - 7\cdot 1 \\ 7 = 3\cdot 2 + 1 & \text{移項して} & 1 = 7 - 3\cdot 2 \end{array}$$

ゆえに　$1 = 7 - 3\cdot 2 = 7 - (10 - 7\cdot 1)\cdot 2 = 7\cdot 3 - 10\cdot 2 = (27 - 10\cdot 2)\cdot 3 - 10\cdot 2$
$= 27\cdot 3 - 10\cdot 8 = 27\cdot 3 - (64 - 27\cdot 2)\cdot 8 = 27\cdot 19 - 64\cdot 8$

すなわち　$27\cdot 19 - 64\cdot 8 = 1$　……④

③－④ から　$27(a - 19) - 64(b - 8) = 0$　すなわち　$27(a - 19) = 64(b - 8)$

27 と 64 は互いに素であるから，k を整数として，$a - 19 = 64k$ と表される。

よって　　$a=64k+19$

これを満たす a のうち，0 以上で最小のものは，$k=0$ としたときで　　19

したがって，求める m の値は　　$m=27\cdot 19+5={}^{タチツ}518$

参考 1，$27a-64b=1$ のすべての整数解は　　$a=64k+19$，$b=27k+8$　(k は整数)

$b=27k+8$ に $k=0$ を代入すると　　$b=8$

これを用いて m の値を求めると　　$m=64\cdot 8+6={}^{タチツ}518$

参考 2，$27a-64b=1$ の 1 つの解を次のように求めてもよい。

$64=27\cdot 2+10$ であるから　　$27a-(27\cdot 2+10)b=1$

すなわち　　$27(a-2b)-10b=1$

これを満たす整数 $a-2b$，b の組の 1 つは　　$a-2b=3$，$b=8$

これを解いて　　$a=19$，$b=8$

(テ)　$012_{(6)}$ を 10 進数で表すと　　$012_{(6)}=0\cdot 6^2+1\cdot 6^1+2\cdot 6^0=6+2=8$　……⑤

②，⑤ から，T 6 をスタートさせた l 秒後に T 6 が 012 と表示されることと，l を 216 で割った余りが 8 であることは同値である。

ゆえに，T 6 をスタートさせてから，012 と表示されるまでの時間は $216c+8$ (c は 0 以上の整数) と表される。

(タチツ) と同様に，$64b+6=216c+8$ として変形すると　　$32b-108c=1$

すなわち　　$2(16b-54c)=1$　……⑥

b，c は整数であるから，⑥ の左辺は偶数，右辺は奇数である。

よって，⑥ を満たす b，c は存在しない。

したがって，T 4 と T 6 を同時にスタートさせてから，両方が同時に 012 と表示されることはない。　(^{テ} ③)