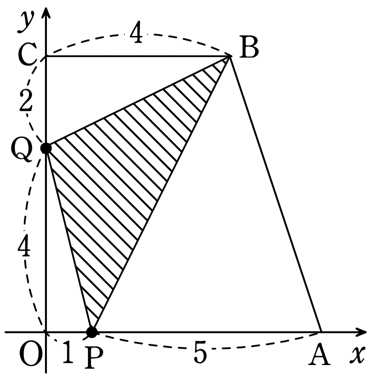
数学Ⅰ・A　第２問〔1〕

(1)　開始時刻から１秒後の点 P，Q の位置は右図のようになる。



図より　　$\triangle\mathrm{PBQ}=(\text{台形OABC})$

$-(\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{QBC})$

よって，求める $\triangle\mathrm{PBQ}$ の面積 S は

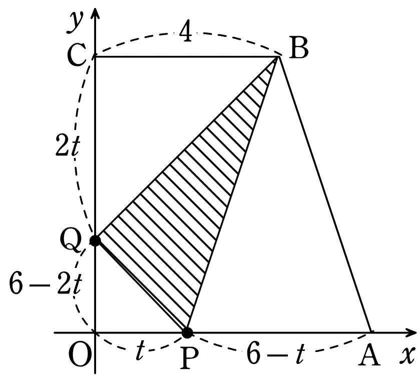
$$S=\frac{1}{2}\cdot(4+6)\cdot 6-\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\right)$$

$=$ [ア]9

(2)　開始時刻から t 秒後の $\triangle\mathrm{PBQ}$ の面積を $S(t)$ とする。

P，Q の移動が終了するのは P，Q がそれぞれ A，C に到達するときであるから，6 秒後である。

よって，t の値の範囲は　　$0\leqq t\leqq 6$



$0\leqq t\leqq 3$ のとき　　$\mathrm{CQ}=2t$，$\mathrm{QO}=6-2t$，

$\mathrm{OP}=t$，$\mathrm{PA}=6-t$

となるから，$S(t)$ は

$$S(t)=(\text{台形OABC})-(\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{QBC})$$

$$=30-\left\{\frac{1}{2}\cdot t(6-2t)+\frac{1}{2}(6-t)\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot 4\right\}$$

$$=t^2-4t+12=(t-2)^2+8$$

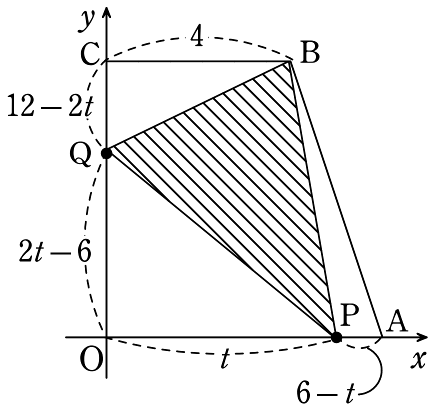
よって，$0\leqq t\leqq 3$ において，$S(t)$ は

$t=2$ で最小値 [イ]8，$t=0$ で最大値 [ウエ]12 をとる。

(3)　$3\leqq t\leqq 6$ のとき　　$\mathrm{QO}=2t-6$，

$\mathrm{CQ}=6-(2t-6)=12-2t$，

$\mathrm{OP}=t$，$\mathrm{PA}=6-t$



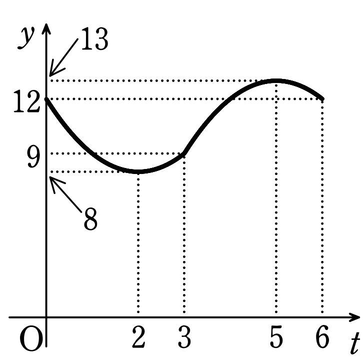
となるから，$S(t)$ は

$$S(t)=(\text{台形OABC})-(\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{QBC})$$

$$=30-\left\{\frac{1}{2}\cdot t(2t-6)+\frac{1}{2}(6-t)\cdot 6+\frac{1}{2}(12-2t)\cdot 4\right\}$$

$$=-t^2+10t-12=-(t-5)^2+13$$

よって，$0\leqq t\leqq 6$ における $y=S(t)$ のグラフは右図のようになる。



図より，$0\leqq t\leqq 6$ において，$S(t)$ は

$t=2$ で最小値 [オ]8，$t=5$ で最大値 [カキ]13 をとる。

(4)　(2)，(3) より，$S(t)$ は　　$0 \leqq t \leqq 3$ のとき　　$S(t)=t^2-4t+12$

$3 \leqq t \leqq 6$ のとき　　$S(t)=-t^2+10t-12$

である。

面積が 10 以下となるとき　　$S(t) \leqq 10$

[1]　$0 \leqq t \leqq 3$ のとき　　$t^2-4t+12 \leqq 10$

すなわち　　$t^2-4t+2 \leqq 0$

これを解いて　　$2-\sqrt{2} \leqq t \leqq 2+\sqrt{2}$

$0 \leqq t \leqq 3$ との共通範囲は　　$2-\sqrt{2} \leqq t \leqq 3$　…… ①

[2]　$3 \leqq t \leqq 6$ のとき　　$-t^2+10t-12 \leqq 10$

すなわち　　$t^2-10t+22 \geqq 0$

これを解いて　　$t \leqq 5-\sqrt{3}$，$5+\sqrt{3} \leqq t$

$3 \leqq t \leqq 6$ との共通範囲は　　$3 \leqq t \leqq 5-\sqrt{3}$　…… ②

よって，$S(t) \leqq 10$ を満たす t の値の範囲は ①，② を合わせた範囲で

$$2-\sqrt{2} \leqq t \leqq 5-\sqrt{3}$$

したがって，面積が 10 以下となる時間は

$$5-\sqrt{3}-(2-\sqrt{2})={}^{ク}3-\sqrt{{}^{ケ}3}+\sqrt{{}^{コ}2}$$