数学Ⅱ・B　第１問〔1〕

(1)　$x=\frac{\pi}{6}$ のとき　　$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　　$\sin x<\sin 2x$　　（ア ⓪）

$x=\frac{2}{3}\pi$ のとき　　$\sin x=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 2x=\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　　$\sin x>\sin 2x$　　（イ ②）

(2)　$\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(^{ウ}2\cos x-{}^{エ}1)$

よって，$\sin 2x-\sin x>0$ が成り立つことは

「$\sin x>0$ かつ $2\cos x-1>0$」　……①

または「$\sin x<0$ かつ $2\cos x-1<0$」　……②

が成り立つことと同値である。

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，① について，$\sin x>0$ より　　$0<x<\pi$

また，$2\cos x-1>0$ のとき，$\cos x>\frac{1}{2}$ であるから　　$0\leqq x<\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi<x\leqq 2\pi$

以上より，$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，① が成り立つような x の値の範囲は　　$0<x<\frac{\pi}{^{オ}3}$

また，② について，$\sin x<0$ より　　$\pi<x<2\pi$

$2\cos x-1<0$ のとき，$\cos x<\frac{1}{2}$ であるから　　$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

したがって，② が成り立つような x の値の範囲は　　$\pi<x<\frac{^{カ}5}{^{キ}3}\pi$

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x>\sin x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0<x<\frac{\pi}{3},\quad \pi<x<\frac{5}{3}\pi$$

(3)　$\alpha+\beta=4x$，$\alpha-\beta=3x$ のとき　　$\alpha=\frac{7}{2}x$，$\beta=\frac{x}{2}$

よって，③ より　　$\sin 4x-\sin 3x=2\cos\frac{7}{2}x\sin\frac{x}{2}$

したがって，$\sin 4x-\sin 3x>0$ が成り立つことは

「$\cos\frac{7}{2}x>0$ かつ $\sin\frac{x}{2}>0$」　……④

または「$\cos\frac{7}{2}x<0$ かつ $\sin\frac{x}{2}<0$」　……⑤

が成り立つことと同値である。　（ク ⓐ，ケ ⑦）

$0\leqq x\leqq \pi$ のとき，$0\leqq\frac{7}{2}x\leqq\frac{7}{2}\pi$ であるから，$\cos\frac{7}{2}x>0$ のとき

$$0\leqq\frac{7}{2}x<\frac{\pi}{2},\quad \frac{3}{2}\pi<\frac{7}{2}x<\frac{5}{2}\pi$$

よって　　$0\leqq x<\frac{\pi}{7}$，$\frac{3}{7}\pi<x<\frac{5}{7}\pi$

また，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq \dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\sin\dfrac{x}{2} > 0$ のとき　$0 < \dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$

よって　$0 < x \leqq \pi$

以上より，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，④ が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{7},\ \frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$$

また，$0 \leqq x \leqq \pi$ において $\sin\dfrac{x}{2} < 0$ を満たす x は存在しない。

よって，$0 \leqq x \leqq \pi$ において ⑤ を満たす x は存在しない。

以上より，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{{}^{コ}7},\ \frac{{}^{サ}3}{{}^{シ}7}\pi < x < \frac{{}^{ス}5}{{}^{セ}7}\pi$$

(4)　(3) の考察から，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi,\ \frac{5}{7}\pi < x < \pi \quad \cdots\cdots ⑥$$

また，$\sin 4x > \sin 2x$ について，$2x = X$ とおくと　$\sin 2X > \sin X$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq X \leqq 2\pi$ であるから，(2) の結果が利用できて

$$0 < X < \frac{\pi}{3},\ \pi < X < \frac{5}{3}\pi$$

よって　$0 < x < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5}{6}\pi$　$\cdots\cdots$ ⑦

求める x の値の範囲は，⑥，⑦ を同時に満たす x の値の範囲であるから

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{{}^{ソ}6},\ \frac{5}{7}\pi < x < \frac{{}^{タ}5}{{}^{チ}6}\pi$$

数学Ⅱ・B　第 1 問〔2〕

(1)　$a > 0$，$a \neq 1$，$b > 0$ のとき，$\log_a b = x$ とおくと，対数の定義より　$a^x = b$　(ツ ②)

(2)　(i)　$\log_5 25 = {}^{テ}2$，$\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{{}^{ト}3}{{}^{ナ}2}$

(ii)　$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，$\log_2 3 > 0$ であるから，2 つの自然数 p，q を用いて $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ と表すことができる。

このとき，(1) により $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ は $2^{\frac{p}{q}} = 3$ すなわち $2^p = 3^q$ と変形できる。(ニ ⑤)

いま，2 は偶数であり 3 は奇数であるので，$2^p = 3^q$ を満たす自然数 p，q は存在しない。

したがって，$\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

(iii)　2 以上の自然数 a，b と実数 p，$q\,(q \neq 0)$ に対して $\log_a b = \dfrac{p}{q}$ が成り立つとする。

このとき，(1) により $a^p = b^q$ $\cdots\cdots$ ① が成り立つ。

(ii) と同様に考えると，$\log_a b$ がつねに無理数であるといえるのは，① を満たす自然

数 p，q がつねに存在しないときである。

選択肢 ⓪ ～ ⑤ のうち，① を満たす自然数 p，q がつねに存在しないのは，a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数 のときである。(ヌ ⑤)

参考 (① について)

$a^p=b^q$ を満たす自然数 p，q が存在するためには，a と b の素因数がすべて共通であることが必要である。

a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数 のとき，一方は素因数 2 をもち，もう一方は素因数 2 をもたないから，① を満たす自然数 p，q が存在しないといえる。

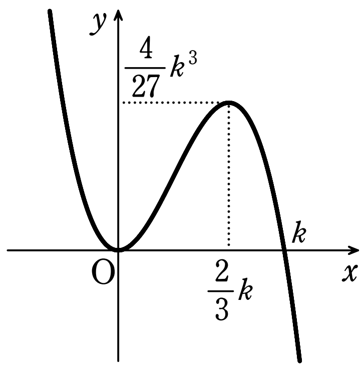
数学Ⅱ・B　第 2 問〔1〕

(1)　$x^2(k-x)=0$ とすると　　$x=0,\ k$

よって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は　　$(0,\ 0)$ と $(k,\ 0)$　(ア ④)

$f(x)=-x^3+kx^2$ であるから

$$f'(x)={}^{イウ}-3x^2+{}^{エ}2kx=-3x\left(x-\frac{2}{3}k\right)$$



$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ \dfrac{2}{3}k$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

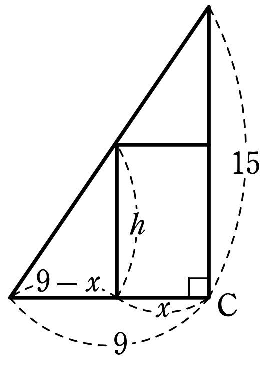
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって　　$x=0$ で極小値 $f(0)=0$ をとり，　(オ ⓪，カ ⓪)

$x=\dfrac{2}{3}k$ で極大値 $f\left(\dfrac{2}{3}k\right)=\dfrac{4}{27}k^3$ をとる。　(キ ③，ク ⑨)

また，$0<x<k$ の範囲において，$x=\dfrac{2}{3}k$ で $f(x)$ は最大となる。

(2)　円錐の頂点を通り底面に垂直な平面で立体を切ったときの断面の左半分を考える。



円錐に内接する円柱の底面の半径を x，高さを h とすると

$0<x<9$

また，$9:15=(9-x):h$ より　　$h=\dfrac{5}{3}(9-x)$

したがって，円柱の体積 V は

$$V=\pi x^2h=\frac{{}^{ケ}5}{{}^{コ}3}\pi x^2({}^{サ}9-x)$$

(1) の $f(x)$ について，$k=9$ とすると　　$V=\dfrac{5}{3}\pi f(x)$

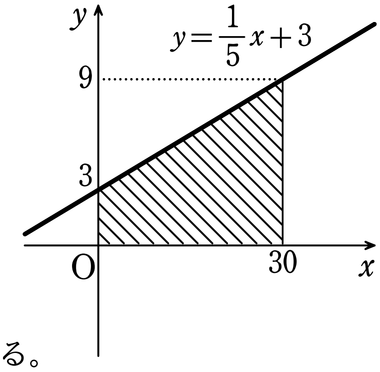
よって，(1) の結果から，$0<x<9$ の範囲において，$x=\dfrac{2}{3}\cdot 9$ で $f(x)$ は最大となる。

以上より，V は $x={}^{\text{シ}}6$ で最大値 $\dfrac{5}{3}\pi\cdot\dfrac{4}{27}\cdot 9^3={}^{\text{スセソ}}180\pi$ をとる。

数学Ⅱ・B 第 2 問〔2〕

(1) $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^{30}=90+90={}^{\text{タチツ}}180$

$\displaystyle\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=\frac{1}{{}_{\text{テトナ}}300}x^3-\frac{1}{{}_{\text{ニヌ}}12}x^2+{}^{\text{ネ}}5x+C$ （C は積分定数）



別解　定積分 $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx$ の値は右の図の斜線部分の面積である。

よって　$\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=(3+9)\cdot 30\cdot\frac{1}{2}={}^{\text{タチツ}}180$

(2) (i) $\displaystyle S(t)=\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\frac{1}{10}t^2+3t$

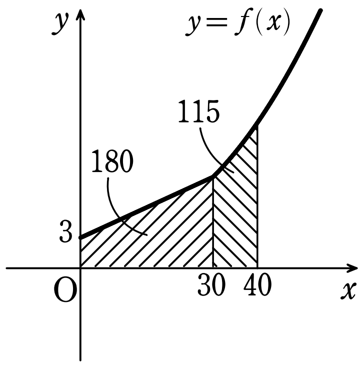
2 月に入ってから t 日後にソメイヨシノが開花するとする。

このとき　$\dfrac{1}{10}t^2+3t=400$　　整理すると　$t^2+30t-4000=0$

ゆえに　$(t+80)(t-50)=0$　　$t\geqq 0$ であるから　$t=50$

したがって，ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから 50 日後となる。（${}^{\text{ノ}}$ ④）

(ii) $0\leqq x\leqq 30$ のとき　$f(x)=\dfrac{1}{5}x+3$



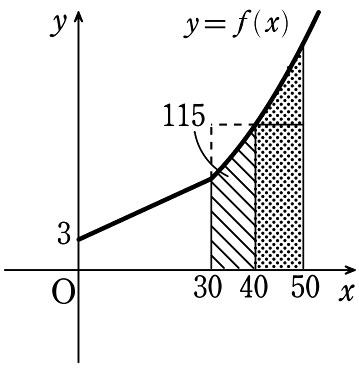
$x\geqq 30$ のとき　$f(x)=\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5$

であるから，(1)より

$$\int_0^{30}f(x)\,dx=180$$

また　$\displaystyle\int_{30}^{40}f(x)\,dx=115$

よって　
$$S(40)=\int_0^{40}f(x)\,dx=\int_0^{30}f(x)\,dx+\int_{30}^{40}f(x)\,dx=295$$



また，$x\geqq 30$ の範囲において，$f(x)$ は増加するから，

右の図より　$\displaystyle\int_{30}^{40}f(x)\,dx<\int_{40}^{50}f(x)\,dx$　（${}^{\text{ハ}}$ ⓪）

$S(40)<400$ より，ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから 40 日後より後であり，$S(50)$ を考えると

$$S(50)=\int_0^{50}f(x)\,dx=\int_0^{40}f(x)\,dx+\int_{40}^{50}f(x)\,dx$$

$$=S(40)+\int_{40}^{50}f(x)\,dx>S(40)+\int_{30}^{40}f(x)\,dx=295+115=410$$

よって　　$S(50)>400$

したがって，$S(40)<400<S(50)$ であるから，ソメイヨシノの開花日時は 2 月に入ってから 40 日後より後，かつ 50 日後より前である。　(ヒ ④)

数学Ⅱ･B　第 3 問

(1)　(i)　確率変数 X は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うから

$$P(X\geqq m)=P\left(\frac{X-m}{\sigma}\geqq{}^{ア}0\right)=\frac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}2}\quad\cdots\cdots①$$

(ii)　母平均が m，母標準偏差が σ であるから，標本平均 $\overline{X}$ の平均 (期待値) と標準偏差は　　$E(\overline{X})=m$，$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$　(エ ④，オ ②)

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから　　$P(-z_0\leqq Z\leqq z_0)=2p(z_0)$

$2p(z_0)=0.901$ から　　$p(z_0)=0.4505$　　　正規分布表から　　$z_0={}^{カ}1.{}^{キク}65$

標本の標準偏差は 3.6，標本の大きさは 400 であるから，求める信頼区間は

$$30-1.65\cdot\frac{3.6}{\sqrt{400}}\leqq m\leqq 30+1.65\cdot\frac{3.6}{\sqrt{400}}\quad\cdots\cdots②$$

ここで　　$1.65\cdot\dfrac{3.6}{\sqrt{400}}=0.297\fallingdotseq 0.3$

よって，② は　　$30-0.3\leqq m\leqq 30+0.3$　　すなわち　$29.7\leqq m\leqq 30.3$　(ケ ④)

(2)　(i)　$m=30$ であるから，① と同様にして　　$P(X\leqq 30)=\dfrac{{}^{コ}1}{{}^{サ}2}$

U_0 は二項分布 $B\left(50,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから　　$p_0={}_{50}\mathrm{C}_{{}^{シス}25}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{25}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{50-25}$

(ii)　U_k は二項分布 $B\left(50+k,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから，U_k の期待値 m_k と標準偏差 σ_k は

$$m_k=(50+k)\cdot\frac{1}{2}=\frac{50+k}{2},\ \sigma_k=\sqrt{(50+k)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{50+k}{4}}$$

よって，U_k は近似的に正規分布 $N\left(\dfrac{50+k}{2},\ \dfrac{50+k}{4}\right)$ に従い，$Y=\dfrac{U_k-\dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}}$ とすると，Y は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。(セ ③，ソ ⑦)

$U_k=25$ のとき　　　$Y=\dfrac{25-\dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}}=-\dfrac{k}{\sqrt{50+k}}$

$$U_k=25+k \text{ のとき} \qquad Y=\frac{25+k-\dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}}=\frac{k}{\sqrt{50+k}}$$

であるから，求める確率は

$$p_k=P(25\leqq U_k\leqq 25+k)=P\left(-\frac{k}{\sqrt{50+k}}\leqq Y\leqq\frac{k}{\sqrt{50+k}}\right) \quad (^{タ}⓪)$$

$k=\alpha$，$\sqrt{50+k}=\beta$ を $\alpha^2\geqq 4\beta^2$ に代入すると　　$k^2\geqq 4(50+k)$

整理すると　　$k^2-4k-200\geqq 0$　……③

$k^2-4k-200=0$ を解くと

$$k=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-200)}=2\pm\sqrt{204}=2\pm 2\sqrt{51}$$

よって，③の解は　　$k\leqq 2-2\sqrt{51}$，$2+2\sqrt{51}\leqq k$

$k>0$ であるから　　$k\geqq 2+2\sqrt{51}=2+2\times 7.14=16.28$

k は自然数であるから　　$k\geqq 17$

ゆえに，$\alpha^2\geqq 4\beta^2$ を満たす最小の k を k_0 とすると　　$k_0={}^{チツ}17$

したがって，少なくとも 67 個のピーマンを抽出しておけば，ピーマン分類法で 25 袋作ることができる確率は 0.95 以上となる。

数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　(方針 1)　3 年目の初めの預金額は，2 年目の初めの預金額 a_2 万円に 1 % の利息がついたものと 3 年目の初めの入金額 p 万円の合計であるから

$$a_3=1.01a_2+p=1.01\{1.01(10+p)+p\}+p \quad (^{ア}②)$$

$(n+1)$ 年目の初めの預金額は，n 年目の初めの預金額 a_n 万円に 1 % の利息がついたものと $(n+1)$ 年目の初めの入金額 p 万円の合計であるから

$$a_{n+1}=1.01a_n+p \quad (^{イ}⓪，{}^{ウ}③)$$

変形すると　　$a_{n+1}+100p=1.01(a_n+100p)$　……①　$(^{エ}④，{}^{オ}⓪)$

(方針 2)　1 年目の初めに入金した p 万円は，もともと預金口座にあった 10 万円と同じように利息がつくから，n 年目の初めには $p\times 1.01^{n-1}$ 万円になる。$(^{カ}②)$

2 年目の初めに入金した p 万円は，1 年目の初めに入金した p 万円よりも 1 年分利息が少ないから，n 年目の初めには $p\times 1.01^{n-2}$ 万円になる。$(^{キ}③)$

同様に，n 年目の初めに入金した p 万円までを考えると

$$\begin{aligned}a_n&=10\times 1.01^{n-1}+p\times 1.01^{n-1}+p\times 1.01^{n-2}+\cdots\cdots+p\\&=10\times 1.01^{n-1}+p(1.01^{n-1}+1.01^{n-2}+\cdots\cdots+1)\\&=10\times 1.01^{n-1}+p\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1} \quad (^{ク}②)\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}=\frac{1\cdot(1.01^n-1)}{1.01-1}=100(1.01^n-1)$ であるから，a_n を求めることができる。$(^{ケ}①)$

(2)　10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと

$$1.01a_{10} \geqq 30 \quad \cdots\cdots ② \quad (^{コ}③)$$

ここで，(1) の方針 2 から a_n を求めると　　$a_n = 10 \times 1.01^{n-1} + 100(1.01^n - 1)p$

よって，② の不等式は　　$1.01\{10 \times 1.01^{10-1} + 100(1.01^{10} - 1)p\} \geqq 30$

ゆえに　$10 \times 1.01^{10} + 101(1.01^{10} - 1)p \geqq 30$　　したがって　$p \geqq \dfrac{^{サシ}30 - {}^{スセ}10 \times 1.01^{10}}{101(1.01^{10} - 1)}$

$\boxed{参考}$　(方針 1 から a_n を求める場合)

① より，数列 $\{a_n + 100p\}$ は初項 $a_1 + 100p = 10 + p + 100p = 10 + 101p$，公比 1.01 の等比数列であるから　　$a_n + 100p = (10 + 101p) \times 1.01^{n-1}$

よって　　$a_n = 10 \times 1.01^{n-1} + 100p \times 1.01^n - 100p$

ゆえに　　$a_n = 10 \times 1.01^{n-1} + 100(1.01^n - 1)p$

(3)　方針 2 の考え方を利用して，入金を始める前の預金額が 13 万円の場合の n 年目の初めの預金額を求めると　　$13 \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{n-2} + \cdots\cdots + p$

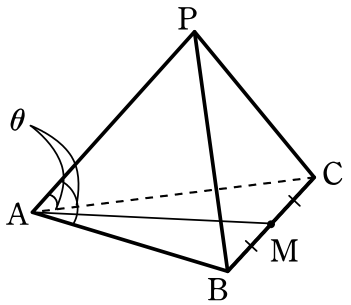
これから a_n を引くと　　$13 \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{n-2} + \cdots\cdots + p$

$$-(10 \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{n-1} + p \times 1.01^{n-2} + \cdots\cdots + p)$$

$$= 13 \times 1.01^{n-1} - 10 \times 1.01^{n-1} = 3 \times 1.01^{n-1} \quad (^{ソ}⑧)$$

数学Ⅱ・B　第 5 問

(1)　M は辺 BC の中点であるから



$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{^{ア}1}{^{イ}2}\overrightarrow{AB} + \frac{^{ウ}1}{^{エ}2}\overrightarrow{AC}$$

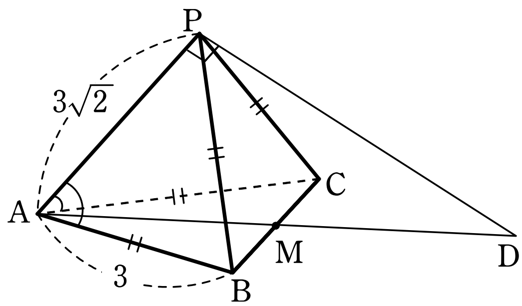
また，$\angle PAB = \angle PAC = \theta$ より

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$$

したがって　　$\dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|} = \cos\theta \quad \cdots\cdots ① \quad (^{オ}①)$

(2)　$\angle PAB = \angle PAC$，$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ より



$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ = {}^{カ}9$$

D は直線 AM 上にあるから

$$\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AM}$$

となる実数 t がある。

ゆえに　　$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AP}$

$$= t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AP} = \frac{t}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{t}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}$$

ここで　　$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} = (-\overrightarrow{AP}) \cdot \left(\dfrac{t}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{t}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}\right)$

$$=-\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{t}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

$$=-\frac{t}{2}\times 9-\frac{t}{2}\times 9+(3\sqrt{2})^2=-9t+18$$

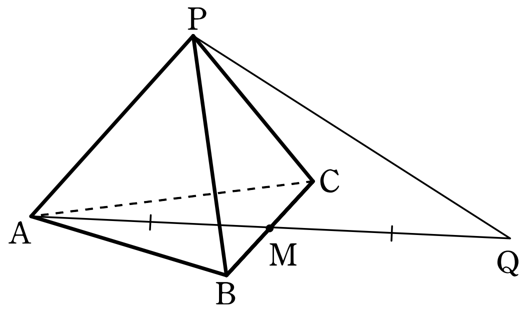
$\angle\mathrm{APD}=90°$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=0$ であるから　　$-9t+18=0$　　よって　$t=2$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=$ キ$2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

(3)　(i)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$=2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$



であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-\overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

$$=-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直のとき $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ であるから

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=0$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　（ク ⓪）

変形すると　　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\fallingdotseq 0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$　……②

となる。（ケ ③）

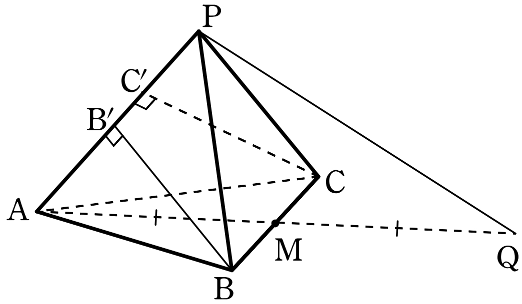
(ii)　$k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つとき

$$k|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta$$

$0<\theta<90°$ より $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta\fallingdotseq 0$ であるから

$$k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\quad\cdots\cdots③$$

が成り立つ。（コ ⓪）



$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるとき ②，③ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

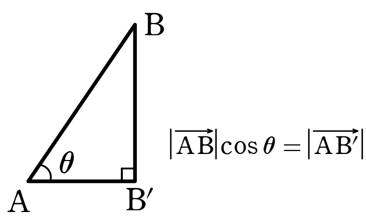
より　$(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$　……④

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|$ であるから，

④ は　　$(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

よって　　$\mathrm{AB'}:\mathrm{AP}=1:(1+k)$

したがって，B′ は線分 AP を $1:k$ に内分する点である。



また，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|$ であるから，③ より

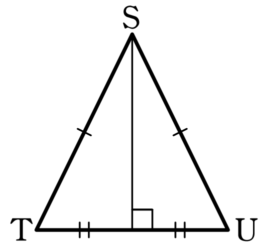
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|=k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=k|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|$$

よって　　$\mathrm{AC'}:\mathrm{AP}=k|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|:(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|$

すなわち　　$AC' : AP = k : (1+k)$

したがって，C' は線分 AP を $k : 1$ に内分する点である。　（サ ④）

$k=1$ のとき，B' と C' はどちらも辺 AP の中点である。



一般に，△STU において頂点 S から辺 TU に下ろした垂線と辺 TU の交点が TU の中点であることと，△STU が ST＝SU の二等辺三角形であることは同値である。

B' と C' はそれぞれ B と C から辺 AP に下ろした垂線と辺 AP の交点であるから，$k=1$ のとき，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であることは，△PAB と △PAC がそれぞれ BP＝BA，CP＝CA を満たす二等辺三角形であることと同値である。　（シ ②）