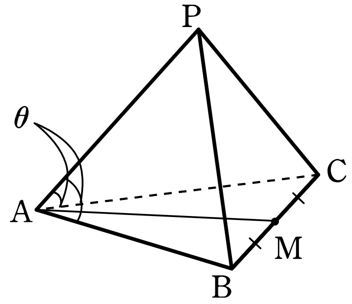
数学Ⅱ・B　第 5 問

(1)　M は辺 BC の中点であるから



$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{{}^{ア}1}{{}^{イ}2}\overrightarrow{AB}+\frac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}2}\overrightarrow{AC}$$

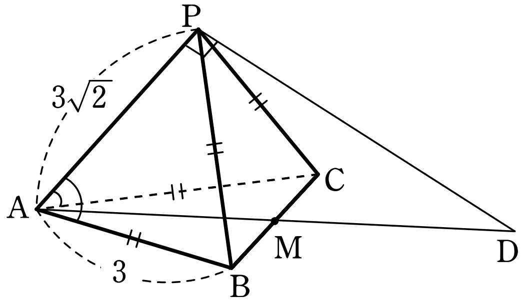
また，$\angle PAB=\angle PAC=\theta$ より

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$$

したがって　$\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|}=\cos\theta$　……①　(^{オ} ①)

(2)　$\angle PAB=\angle PAC$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ より



$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=3\sqrt{2}\cdot3\cdot\cos45^\circ={}^{カ}9$$

D は直線 AM 上にあるから

$$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AM}$$

となる実数 t がある。

ゆえに　$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}$

$$=t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AP}=\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}$$

ここで　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=(-\overrightarrow{AP})\cdot\left(\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\right)$

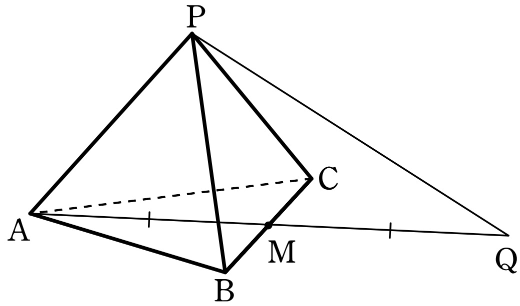
$$=-\frac{t}{2}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{t}{2}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AP}|^2$$

$$=-\frac{t}{2}\times9-\frac{t}{2}\times9+(3\sqrt{2})^2=-9t+18$$

$\angle APD=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=0$ であるから　$-9t+18=0$　よって　$t=2$

したがって　$\overrightarrow{AD}={}^{キ}2\overrightarrow{AM}$

(3)　(i)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AP}$



$$=2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AP}$$

$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}$$

であるから

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=(-\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$$

$$=-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AP}|^2$$

$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直のとき $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ であるから

$$-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AP}|^2=0$$

したがって　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}$　(^{ク} ⓪)

変形すると　　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\fallingdotseq 0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$　……②

となる。　(ケ ③)

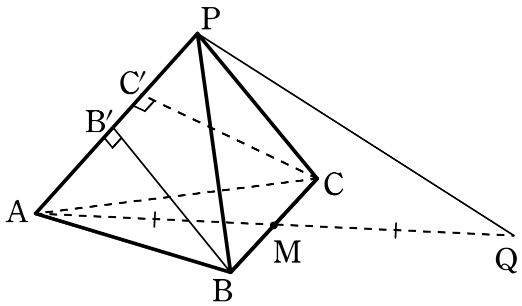
(ii)　$k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つとき

$$k|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta$$

$0<\theta<90^\circ$ より $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta\fallingdotseq 0$ であるから

$$k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。　(コ ⓪)



$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるとき ②，③ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta+k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$$

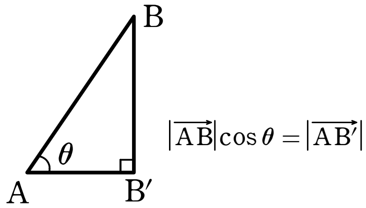
より　$(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$　……④

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|$ であるから，

④ は　　$(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

よって　　$\mathrm{AB'}:\mathrm{AP}=1:(1+k)$

したがって，B′ は線分 AP を $1:k$ に内分する点である。



また，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|$ であるから，③ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC'}}|=k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=k|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|$$

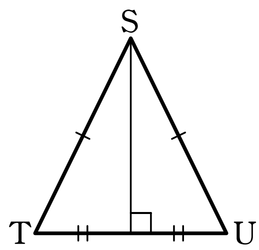
よって　　$\mathrm{AC'}:\mathrm{AP}=k|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|:(1+k)|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|$

すなわち　　$\mathrm{AC'}:\mathrm{AP}=k:(1+k)$

したがって，C′ は線分 AP を $k:1$ に内分する点である。　(サ ④)

$k=1$ のとき，B′ と C′ はどちらも辺 AP の中点である。

一般に，△STU において頂点 S から辺 TU に下ろした垂線と辺 TU の交点が TU の中点であることと，△STU が ST＝SU の二等辺三角形であることは同値である。



B′ と C′ はそれぞれ B と C から辺 AP に下ろした垂線と辺 AP の交点であるから，$k=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であることは，△PAB と △PAC がそれぞれ BP＝BA，CP＝CA を満たす二等辺三角形であることと同値である。　(シ ②)