数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　(方針 1)　3 年目の初めの預金額は，2 年目の初めの預金額 a_2 万円に 1 % の利息がついたものと 3 年目の初めの入金額 p 万円の合計であるから

$$a_3 = 1.01a_2 + p = 1.01\{1.01(10+p)+p\}+p \quad (^{ア}\ ②)$$

$(n+1)$ 年目の初めの預金額は，n 年目の初めの預金額 a_n 万円に 1 % の利息がついたものと $(n+1)$ 年目の初めの入金額 p 万円の合計であるから

$$a_{n+1} = 1.01a_n + p \quad (^{イ}\ ⓪,\ ^{ウ}\ ③)$$

変形すると　$a_{n+1}+100p = 1.01(a_n+100p)$　……①　$(^{エ}\ ④,\ ^{オ}\ ⓪)$

(方針 2)　1 年目の初めに入金した p 万円は，もともと預金口座にあった 10 万円と同じように利息がつくから，n 年目の初めには $p\times1.01^{n-1}$ 万円になる。$(^{カ}\ ②)$

2 年目の初めに入金した p 万円は，1 年目の初めに入金した p 万円よりも 1 年分利息が少ないから，n 年目の初めには $p\times1.01^{n-2}$ 万円になる。$(^{キ}\ ③)$

同様に，n 年目の初めに入金した p 万円までを考えると

$$\begin{aligned} a_n &= 10\times1.01^{n-1} + p\times1.01^{n-1} + p\times1.01^{n-2} + \cdots\cdots + p \\ &= 10\times1.01^{n-1} + p(1.01^{n-1}+1.01^{n-2}+\cdots\cdots+1) \\ &= 10\times1.01^{n-1} + p\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1} \quad (^{ク}\ ②) \end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1} = \frac{1\cdot(1.01^n-1)}{1.01-1} = 100(1.01^n-1)$ であるから，a_n を求めることができる。$(^{ケ}\ ①)$

(2)　10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと

$$1.01a_{10} \geqq 30 \quad \cdots\cdots ② \quad (^{コ}\ ③)$$

ここで，(1) の方針 2 から a_n を求めると　$a_n = 10\times1.01^{n-1} + 100(1.01^n-1)p$

よって，② の不等式は　$1.01\{10\times1.01^{10-1} + 100(1.01^{10}-1)p\} \geqq 30$

ゆえに　$10\times1.01^{10} + 101(1.01^{10}-1)p \geqq 30$　　したがって　$p \geqq \dfrac{^{サシ}30 - {}^{スセ}10\times1.01^{10}}{101(1.01^{10}-1)}$

参考　(方針 1 から a_n を求める場合)

① より，数列 $\{a_n+100p\}$ は初項 $a_1+100p = 10+p+100p = 10+101p$，公比 1.01 の等比数列であるから　$a_n+100p = (10+101p)\times1.01^{n-1}$

よって　$a_n = 10\times1.01^{n-1} + 100p\times1.01^n - 100p$

ゆえに　$a_n = 10\times1.01^{n-1} + 100(1.01^n-1)p$

(3)　方針 2 の考え方を利用して，入金を始める前の預金額が 13 万円の場合の n 年目の初めの預金額を求めると　$13\times1.01^{n-1} + p\times1.01^{n-1} + p\times1.01^{n-2} + \cdots\cdots + p$

これから a_n を引くと

$$\begin{aligned} &13\times1.01^{n-1} + p\times1.01^{n-1} + p\times1.01^{n-2} + \cdots\cdots + p \\ &\quad -(10\times1.01^{n-1} + p\times1.01^{n-1} + p\times1.01^{n-2} + \cdots\cdots + p) \\ &= 13\times1.01^{n-1} - 10\times1.01^{n-1} = 3\times1.01^{n-1} \quad (^{ソ}\ ⑧) \end{aligned}$$