# 数学Ⅱ・B　第３問

(1)　(i)　確率変数 $X$ は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うから

$$P(X \geqq m) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq {}^{ア}0\right) = \frac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}2} \quad \cdots\cdots ①$$

(ii)　母平均が $m$，母標準偏差が $\sigma$ であるから，標本平均 $\overline{X}$ の平均（期待値）と標準偏差

は　$E(\overline{X}) = m,\ \sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$　（${}^{エ}$④，${}^{オ}$②）

確率変数 $Z$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから　$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 2p(z_0)$

$2p(z_0) = 0.901$ から　$p(z_0) = 0.4505$　正規分布表から　$z_0 = {}^{カ}1.{}^{キク}65$

標本の標準偏差は 3.6，標本の大きさは 400 であるから，求める信頼区間は

$$30 - 1.65 \cdot \frac{3.6}{\sqrt{400}} \leqq m \leqq 30 + 1.65 \cdot \frac{3.6}{\sqrt{400}} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで　$1.65 \cdot \dfrac{3.6}{\sqrt{400}} = 0.297 \fallingdotseq 0.3$

よって，② は　$30 - 0.3 \leqq m \leqq 30 + 0.3$　すなわち　$29.7 \leqq m \leqq 30.3$　（${}^{ケ}$④）

(2)　(i)　$m = 30$ であるから，① と同様にして　$P(X \leqq 30) = \dfrac{{}^{コ}1}{{}^{サ}2}$

$U_0$ は二項分布 $B\left(50,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから　$p_0 = {}_{50}\mathrm{C}_{{}^{シス}25} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{25} \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{50-25}$

(ii)　$U_k$ は二項分布 $B\left(50+k,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから，$U_k$ の期待値 $m_k$ と標準偏差 $\sigma_k$ は

$$m_k = (50+k) \cdot \frac{1}{2} = \frac{50+k}{2},\quad \sigma_k = \sqrt{(50+k) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{50+k}{4}}$$

よって，$U_k$ は近似的に正規分布 $N\left(\dfrac{50+k}{2},\ \dfrac{50+k}{4}\right)$ に従い，$Y = \dfrac{U_k - \dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}}$ と

すると，$Y$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。（${}^{セ}$③，${}^{ソ}$⑦）

$U_k = 25$ のとき　$$Y = \frac{25 - \dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}} = -\frac{k}{\sqrt{50+k}}$$

$U_k = 25 + k$ のとき　$$Y = \frac{25 + k - \dfrac{50+k}{2}}{\sqrt{\dfrac{50+k}{4}}} = \frac{k}{\sqrt{50+k}}$$

であるから，求める確率は

$$p_k = P(25 \leqq U_k \leqq 25+k) = P\left(-\frac{k}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \frac{k}{\sqrt{50+k}}\right) \quad （{}^{タ}⓪）$$

$k = \alpha,\ \sqrt{50+k} = \beta$ を $\alpha^2 \geqq 4\beta^2$ に代入すると　$k^2 \geqq 4(50+k)$

整理すると　$k^2 - 4k - 200 \geqq 0$　$\cdots\cdots$ ③

$k^2-4k-200=0$ を解くと

$$k=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-200)}=2\pm\sqrt{204}=2\pm2\sqrt{51}$$

よって，③ の解は　　$k\leqq2-2\sqrt{51}$，$2+2\sqrt{51}\leqq k$

$k>0$ であるから　　$k\geqq2+2\sqrt{51}=2+2\times7.14=16.28$

$k$ は自然数であるから　　$k\geqq17$

ゆえに，$\alpha^2\geqq4\beta^2$ を満たす最小の $k$ を $k_0$ とすると　　$k_0={}^{チツ}17$

したがって，少なくとも 67 個のピーマンを抽出しておけば，ピーマン分類法で 25 袋作ることができる確率は 0.95 以上となる。