数学Ⅱ・B　第 1 問〔2〕

(1)　$a>0$，$a\fallingdotseq 1$，$b>0$ のとき，$\log_a b=x$ とおくと，対数の定義より　$a^x=b$　$\left({}^{ツ}\ ②\right)$

(2)　(i)　$\log_5 25={}^{テ}2$，$\log_9 27=\dfrac{\log_3 27}{\log_3 9}=\dfrac{{}^{ト}3}{{}^{ナ}2}$

(ii)　$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，$\log_2 3>0$ であるから，2 つの自然数 p，q を用いて $\log_2 3=\dfrac{p}{q}$ と表すことができる。

このとき，(1) により $\log_2 3=\dfrac{p}{q}$ は $2^{\frac{p}{q}}=3$ すなわち $2^p=3^q$ と変形できる。$\left({}^{ニ}\ ⑤\right)$

いま，2 は偶数であり 3 は奇数であるので，$2^p=3^q$ を満たす自然数 p，q は存在しない。

したがって，$\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

(iii)　2 以上の自然数 a，b と実数 p，$q\,(q\fallingdotseq 0)$ に対して $\log_a b=\dfrac{p}{q}$ が成り立つとする。

このとき，(1) により $a^p=b^q$ ……①が成り立つ。

(ii) と同様に考えると，$\log_a b$ がつねに無理数であるといえるのは，① を満たす自然数 p，q がつねに存在しないときである。

選択肢 ⓪ ～ ⑤ のうち，① を満たす自然数 p，q がつねに存在しないのは，a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数 のときである。$\left({}^{ヌ}\ ⑤\right)$

参考　(① について)

$a^p=b^q$ を満たす自然数 p，q が存在するためには，a と b の素因数がすべて共通であることが必要である。

a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数 のとき，一方は素因数 2 をもち，もう一方は素因数 2 をもたないから，① を満たす自然数 p，q が存在しないといえる。