数学Ⅱ・B　第１問〔1〕

(1)　$x=\frac{\pi}{6}$ のとき　　$\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　　$\sin x<\sin 2x$　　（ア ⓪）

$x=\frac{2}{3}\pi$ のとき　　$\sin x=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 2x=\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　　$\sin x>\sin 2x$　　（イ ②）

(2)　$\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(^{ウ}2\cos x-{}^{エ}1)$

よって，$\sin 2x-\sin x>0$ が成り立つことは

「$\sin x>0$ かつ $2\cos x-1>0$」 ……①

または 「$\sin x<0$ かつ $2\cos x-1<0$」 ……②

が成り立つことと同値である。

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，① について，$\sin x>0$ より　　$0<x<\pi$

また，$2\cos x-1>0$ のとき，$\cos x>\frac{1}{2}$ であるから　　$0\leqq x<\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi<x\leqq 2\pi$

以上より，$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，① が成り立つような x の値の範囲は　　$0<x<\frac{\pi}{{}^{オ}3}$

また，② について，$\sin x<0$ より　　$\pi<x<2\pi$

$2\cos x-1<0$ のとき，$\cos x<\frac{1}{2}$ であるから　　$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5}{3}\pi$

したがって，② が成り立つような x の値の範囲は　　$\pi<x<\frac{{}^{カ}5}{{}^{キ}3}\pi$

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x>\sin x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0<x<\frac{\pi}{3},\ \pi<x<\frac{5}{3}\pi$$

(3)　$\alpha+\beta=4x$，$\alpha-\beta=3x$ のとき　　$\alpha=\frac{7}{2}x$，$\beta=\frac{x}{2}$

よって，③ より　　$\sin 4x-\sin 3x=2\cos\frac{7}{2}x\sin\frac{x}{2}$

したがって，$\sin 4x-\sin 3x>0$ が成り立つことは

「$\cos\frac{7}{2}x>0$ かつ $\sin\frac{x}{2}>0$」 ……④

または 「$\cos\frac{7}{2}x<0$ かつ $\sin\frac{x}{2}<0$」 ……⑤

が成り立つことと同値である。　（ク ⓐ，ケ ⑦）

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$0\leqq\frac{7}{2}x\leqq\frac{7}{2}\pi$ であるから，$\cos\frac{7}{2}x>0$ のとき

$$0\leqq\frac{7}{2}x<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<\frac{7}{2}x<\frac{5}{2}\pi$$

よって　　$0\leqq x<\frac{\pi}{7}$，$\frac{3}{7}\pi<x<\frac{5}{7}\pi$

また，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq \dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\sin\dfrac{x}{2} > 0$ のとき　　$0 < \dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$

よって　　$0 < x \leqq \pi$

以上より，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，④ が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{7},\quad \frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$$

また，$0 \leqq x \leqq \pi$ において $\sin\dfrac{x}{2} < 0$ を満たす x は存在しない。

よって，$0 \leqq x \leqq \pi$ において ⑤ を満たす x は存在しない。

以上より，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{{}^{\text{コ}}7},\quad \frac{{}^{\text{サ}}3}{{}^{\text{シ}}7}\pi < x < \frac{{}^{\text{ス}}5}{{}^{\text{セ}}7}\pi$$

(4)　(3) の考察から，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x$ が成り立つような x の値の範囲は

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi,\quad \frac{5}{7}\pi < x < \pi \quad \cdots\cdots ⑥$$

また，$\sin 4x > \sin 2x$ について，$2x = X$ とおくと　　$\sin 2X > \sin X$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq X \leqq 2\pi$ であるから，(2) の結果が利用できて

$$0 < X < \frac{\pi}{3},\quad \pi < X < \frac{5}{3}\pi$$

よって　　$0 < x < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5}{6}\pi \quad \cdots\cdots$ ⑦

求める x の値の範囲は，⑥，⑦ を同時に満たす x の値の範囲であるから

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{{}^{\text{ソ}}6},\quad \frac{5}{7}\pi < x < \frac{{}^{\text{タ}}5}{{}^{\text{チ}}6}\pi$$