数学Ⅰ・A　第１問〔1〕

$|x+6| \leqq 2$ から　　$-2 \leqq x+6 \leqq 2$

各辺から 6 を引いて　${}^{\text{アイ}}-8 \leqq x \leqq {}^{\text{ウエ}}-4$

$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leqq 2$ において，$(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)=x$ とおくと，

$|x+6| \leqq 2$ となるから

$$-8 \leqq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leqq -4$$

$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると

$$\frac{-4}{1-\sqrt{3}} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \frac{-8}{1-\sqrt{3}}$$

ここで，$\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$2(1+\sqrt{3}) \leqq (a-b)(c-d) \leqq 4(1+\sqrt{3})$$

すなわち　${}^{\text{オ}}2+{}^{\text{カ}}2\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq {}^{\text{キ}}4+{}^{\text{ク}}4\sqrt{3}$

①，②，③ の左辺を展開すると

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd \quad \cdots\cdots ①'$$
$$(a-c)(b-d)=ab-ad-bc+cd \quad \cdots\cdots ②'$$
$$(a-d)(c-b)=ac-ab-cd+bd \quad \cdots\cdots ③'$$

①′ の右辺から ②′ の右辺を引くと ③′ の右辺と等しいから

$$\begin{aligned}(a-d)(c-b)&=(a-b)(c-d)-(a-c)(b-d)\\&=4+4\sqrt{3}-(-3+\sqrt{3})\\&={}^{\text{ケ}}7+{}^{\text{コ}}3\sqrt{3}\end{aligned}$$

数学Ⅰ・A　第１問〔2〕

(1)　(i)　△ABC において，正弦定理により　　$\dfrac{6}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=2\cdot 5$

よって　　$\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$　(${}^{\text{サ}}$ ⓪)

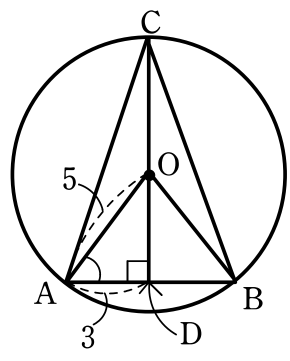
$\angle\mathrm{ACB}$ は鈍角であるから　　$\cos\angle\mathrm{ACB}<0$

ゆえに　　$\cos\angle\mathrm{ACB}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5}$　(${}^{\text{シ}}$ ⑦)

(ii)　△ABC の面積が最大になるのは，右の図のように直線 CD が C，O，D の順になるときである。
このとき，AD＝3，AO＝5 であるから，△OAD において，三平方の定理により

$$\mathrm{OD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

よって　　$\tan\angle\mathrm{OAD}=\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{4}{3}$　(${}^{\text{ス}}$ ④)



また　　$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (OD + OC)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (4+5) = {}^{セソ}27$$

(2)　△PQR において，余弦定理により

$$\cos \angle QPR = \frac{9^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{{}^{タ}5}{{}^{チ}6}$$

$\sin \angle QPR > 0$ であるから　　$\sin \angle QPR = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

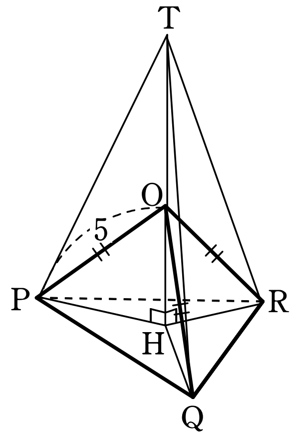
よって　　$\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = {}^{ツ}6\sqrt{{}^{テト}11}$

次に，球 S の中心を O とする。

三角錐 TPQR の体積が最大になるのは，右の図のように直線 TH が T，O，H の順になるときである。

直角三角形 OPH，OQH，ORH は OP＝OQ＝OR＝5 であり，OH は共通であるから合同である。

よって　　PH＝QH＝RH　(^{ナ} ⑥)



△PQR において，PH は外接円の半径であるから

$$\frac{QR}{\sin \angle QPR} = 2PH$$

ゆえに　　$PH = \frac{QR}{2\sin \angle QPR} = \frac{5}{2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{15}{\sqrt{11}}$

△OPH において，三平方の定理により

$$OH = \sqrt{5^2 - \left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{11}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

よって，三角錐 TPQR の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle PQR \cdot (OT + OH) = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{11}\left(5 + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)$$

$$= 2(5\sqrt{11} + 5\sqrt{2})$$

$$= {}^{ニヌ}10(\sqrt{{}^{ネノ}11} + \sqrt{{}^{ハ}2})$$

数学Ⅰ・A　第２問〔1〕

(1)　(第 1 四分位数について)

第 1 四分位数は小さい方から 13 番目の値と 14 番目の値の平均値である。

よって，図 1 から，1800 以上 2200 未満の階級に含まれる。(^{ア} ②)

(第 3 四分位数について)

第 3 四分位数は大きい方から 13 番目の値と 14 番目の値の平均値である。

よって，図 1 から，3000 以上 3400 未満の階級に含まれる。(^{イ} ⑤)

(四分位範囲について)

第1四分位数は1800以上2200未満の階級に含まれ，第3四分位数は3000以上3400未満の階級に含まれる。

よって，四分位範囲は，$3000-2200=800$ より大きく，$3400-1800=1600$ より小さい。(ウ ①)

(2) (i) ⓪ 地域Eにおける小さい方から5番目の支出金額は第1四分位数であり，図2から，この値は2000より大きい。

よって，正しくない。

① 図2，図3の箱ひげ図より，地域Eの範囲より地域Wの範囲の方が大きい。

よって，正しくない。

② 図2，図3の箱ひげ図より，中央値は，地域Eより地域Wの方が大きい。

よって，正しい。

③ 図2，図3の箱ひげ図より，地域Eの中央値は2600より小さく，地域Wの中央値は2600より大きい。

ゆえに，地域Eにおける2600未満の市の割合は50％より大きく，地域Wにおける2600未満の市の割合は50％より小さい。

したがって，2600未満の市の割合は，地域Eの方が地域Wより大きい。

よって，正しくない。

したがって，正しいものは エ ②

(ii) 分散はデータの値の偏差の2乗の平均値である。

したがって，地域Eにおけるかば焼きの支出金額の分散は，地域Eのそれぞれの市におけるかば焼きの支出金額の偏差の2乗を合計して地域Eの市の数で割った値である。(オ ②)

(3) やきとりの支出金額を S，かば焼きの支出金額を T とする。

S と T の相関係数は，$\dfrac{(S\text{と}T\text{の共分散})}{(S\text{の標準偏差})\times(T\text{の標準偏差})}$ で計算できるから，求める

相関係数は $\quad \dfrac{124000}{590\times570}=\dfrac{1240}{3363}=0.368\cdots\cdots$

よって，小数第3位を四捨五入して　0.37　(カ ⑦)

数学Ⅰ・A 第2問〔2〕

(1) 放物線 C_1 は点 $\mathrm{P}_0(0,\ 3)$ を通るから，その方程式を $y=ax^2+bx+3$ とおく。

C_1 は点 $\mathrm{M}(4,\ 3)$ を通るから　$3=16a+4b+3$　　よって　$b=-4a$

このとき，C_1 の方程式は　$y=ax^2-{}^{キ}4ax+{}^{ク}3$

変形すると　$y=a(x-2)^2-4a+3$

プロ選手の「シュートの高さ」は，C_1 の頂点の y 座標であるから　$-{}^{ケ}4a+{}^{コ}3$

また，C_1 の頂点の x 座標は　$x=2$

C_2 の方程式は $y=p\left\{x-\left(2-\dfrac{1}{8p}\right)\right\}^2-\dfrac{(16p-1)^2}{64p}+2$ と表すことができるから，頂点の

x 座標は　　$x=2-\dfrac{1}{8p}$

C_2 は上に凸の放物線であるから，$p<0$ に注意して　　$2<2-\dfrac{1}{8p}$

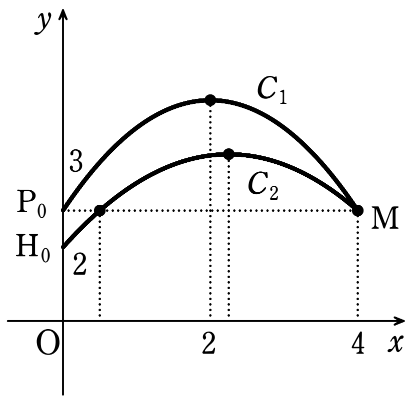
よって，花子さんの「ボールが最も高くなるときの地上の位置」の方が，つねに M の x 座標に近い。(サ ②)

別解　右の図のように，グラフの対称性を考える。

P_0 と M の y 座標が等しいことから，C_1 の頂点の x 座標は　$x=2$

また，H_0 の y 座標の方が，M の y 座標より小さいことから，C_2 は右の図のようになり，C_2 の頂点の x 座標はつねに $2<x<4$ の範囲にある。

よって，花子さんの「ボールが最も高くなるときの地上の位置」の方が，つねに M の x 座標に近い。(サ ②)



(2)　点 D の座標は　$\left(3.8,\ 3+\dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)$　　すなわち　$\left(\dfrac{19}{5},\ 3+\dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)$

C_1 が D を通るから　　$3+\dfrac{\sqrt{3}}{15}=a\cdot\left(\dfrac{19}{5}\right)^2-4a\cdot\dfrac{19}{5}+3$

整理して　　$\dfrac{19}{25}a=-\dfrac{\sqrt{3}}{15}$　　　　よって　　$a=-\dfrac{5\sqrt{3}}{57}$

したがって，C_1 の方程式は　　$y=-\dfrac{{}^{シ}5\sqrt{{}^{ス}3}}{{}^{セソ}57}(x^2-4x)+3$

また，プロ選手の「シュートの高さ」は，$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.73$ とすると

$$-4a+3=-4\cdot\left(-\frac{5\sqrt{3}}{57}\right)+3=\frac{20\sqrt{3}}{57}+3\fallingdotseq 0.607+3=3.607$$

ゆえに，プロ選手の「シュートの高さ」の方が大きく，その差は約 $3.607-3.4\fallingdotseq 0.2$，すなわちボール約 1 個分である。(タ ⓪，チ ⓪)

数学Ⅰ・A 第 3 問

(1)　図 B において，ひもでつながれている球 1 と球 2，球 2 と球 3，球 3 と球 4 は異なる色を塗る。

①—②—③—④

図 B

よって，球 1 の塗り方は　5 通り

球 2 の塗り方は，球 1 に塗った色以外で　4 通り

球 3 の塗り方は，球 2 に塗った色以外で　4 通り

球 4 の塗り方は，球 3 に塗った色以外で　4 通り

したがって，球の塗り方の総数は　　$5\times4\times4\times4={}^{アイウ}320$ (通り)

(2)　図 C において，ひもでつながれている球 1 と球 2，球 2 と球 3，球 3 と球 1 は異なる色を塗る。

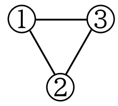


図 C

よって，球 1 の塗り方は　5 通り

球 2 の塗り方は，球 1 に塗った色以外で　4 通り

球 3 の塗り方は，球 1 と球 2 に塗った 2 色以外で　3 通り

したがって，球の塗り方の総数は　$5 \times 4 \times 3 = {}^{エオ}60$ (通り)

(3)　図 D において，ひもでつながれている球 1 と球 2，球 2 と球 3，球 3 と球 4，球 4 と球 1 は異なる色を塗る。

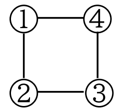


図 D

赤をちょうど 2 回使う塗り方を考えると，赤を塗る球の選び方が，(球 1 と球 3)，(球 2 と球 4) の　2 通り

そのおのおのの場合について，残りの 2 個の球の塗り方が　4×4 通り

したがって，図 D における球の塗り方のうち，赤をちょうど 2 回使う塗り方は

$2 \times 4 \times 4 = {}^{カキ}32$ (通り)

(4)　図 E において，ひもでつながれている球 1 と球 2，球 1 と球 3，球 1 と球 4，球 1 と球 5，球 1 と球 6 は異なる色を塗る。

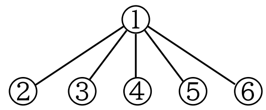


図 E

赤をちょうど 3 回使い，かつ青をちょうど 2 回使う塗り方を考えると，球 1 には赤と青以外の色を塗ることになるから，

球 1 の塗り方が　3 通り

そのおのおのの場合について，球 2 ～球 6 の塗り方が　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り

したがって，図 E における球の塗り方のうち，赤をちょうど 3 回使い，かつ青をちょうど 2 回使う塗り方は　$3 \times \dfrac{5!}{3!2!} = {}^{クケ}30$ (通り)

参考　球 2 ～球 6 の塗り方は，赤を塗る球の選び方を考えて，${}_5C_3$ 通りと求めてもよい。

(5)　図 F における球の塗り方のうち，球 3 と球 4 が同色である場合と，同色でない場合に分けて考えたとき，同色でない塗り方の総数は，図 D における球の塗り方の総数と一致する。

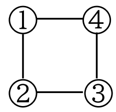


図 D

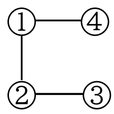


図 F

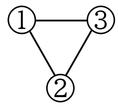


図 C

図 F における球の塗り方は，図 B における球の塗り方と同じであるため，その塗り方は，(1) より　320 通り

そのうち球 3 と球 4 が同色になるような塗り方の総数は，球 3 と球 4 を同じものとして重ねてできる図 C の塗り方の総数と一致する。(コ ②)

その塗り方の総数は，(2) より　60 通り

したがって，図 D における球の塗り方の総数は　$320 - 60 = {}^{サシス}260$ (通り)

(6)　(5) と同様に，図 G において，球 4 と球 5 の間のひもをなくしてできる右の図のような図 H を考え，図 G と図 H を比較する。

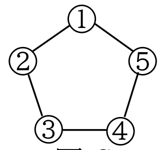


図 G

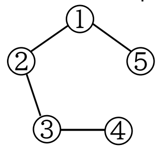


図 H

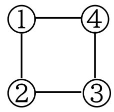


図 D

図 H における球の塗り方のうち，球 4 と球 5 が同色である場合と，同色でない場合に分けて考えたとき，同色でない塗り方の総数は，図 G における球の塗り方の総数と一致する。

図 H における球の塗り方の総数は，(1) と同様に考えて

$$5\times4\times4\times4\times4=1280 \text{ (通り)}$$

そのうち球 4 と球 5 が同色になるような塗り方の総数は，球 4 と球 5 を同じものとして重ねてできる図 D の塗り方の総数と一致する。

その塗り方の総数は，(5) より　　260 通り

したがって，図 G における球の塗り方の総数は　　$1280-260=$ [セソタチ]1020 (通り)

数学 I・A　第 4 問

(1)　462 と 110 を素因数分解すると　　$462=2\cdot3\cdot7\cdot11$，　$110=2\cdot5\cdot11$

よって，462 と 110 の両方を割り切る素数のうち最大のものは　　[アイ]11

図 1 のように赤い長方形を並べて作ることができる正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，1 辺の長さが 462 と 110 の最小公倍数のものである。

462 と 110 の最小公倍数は　　$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=462\cdot5=$ [ウエオカ]2310

また，赤い長方形を横に x 枚，縦に y 枚並べて，正方形ではない長方形を作るとき，横の長さと縦の長さの差の絶対値は正であり，その値は

$$|462x-110y|=|2\cdot3\cdot7\cdot11x-2\cdot5\cdot11y|=22|21x-5y| \quad \cdots\cdots ①$$

このとき，$|21x-5y|$ の値は正の整数であり，$x=1$，$y=4$ とすると

$$21x-5y=21\cdot1-5\cdot4=1$$

したがって，① が最小となるのは，差の絶対値が [キク]22 になるときである。

縦の長さが横の長さより 22 長い長方形を同様にして考えると　　$110y=462x+22$

両辺を 22 で割って整理すると　　$21x-5y=-1$　$\cdots\cdots$ ②

$x=4$，$y=17$ は ② の整数解の 1 つであり　　$21\cdot4-5\cdot17=-1$　$\cdots\cdots$ ③

② − ③ から　　$21(x-4)-5(y-17)=0$

21 と 5 は互いに素であるから　　$x-4=5k$，$y-17=21k$　(k は整数)

すなわち　　$x=5k+4$，$y=21k+17$　(k は整数)

x，y は自然数であるから　　$k\geqq0$

よって，x は $k=0$ で最小値 4 をとる。

したがって，縦の長さが横の長さより 22 長い長方形のうち，横の長さが最小であるものの横の長さは　　$462\cdot4=$ [ケコサシ]1848

(2)　図 2 のように赤い長方形と青い長方形を並べて作ることができる長方形を考えると，赤い長方形を並べてできる長方形の縦の長さと，青い長方形を並べてできる長方形の縦

の長さは等しい。
よって，図 2 のような長方形のうち，縦の長さが最小のものは，縦の長さが 110 と 154 の最小公倍数のものである。
$110=2\cdot5\cdot11$，$154=2\cdot7\cdot11$ であるから，110 と 154 の最小公倍数は

$$2\cdot5\cdot7\cdot11=110\cdot7={}^{スセソ}770$$

したがって，図 2 のように並べてできる長方形の縦の長さは 770 の倍数である。
また，462 と 363 の最大公約数は，$462=2\cdot3\cdot7\cdot11$，$363=3\cdot11^2$ から　　$3\cdot11={}^{タチ}33$
よって，図 2 のように並べて正方形を作るとき，赤い長方形を横に a 枚，青い長方形を横に b 枚並べてできる正方形の横の長さは　　$462a+363b=33(14a+11b)$
33 の倍数のうち，770 の倍数でもある最小の正の整数は，33 と 770 の最小公倍数である。
$33=3\cdot11$，$770=2\cdot5\cdot7\cdot11$ であるから，33 と 770 の最小公倍数は

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=770\cdot3={}^{ツテトナ}2310$$

したがって，図 2 のような正方形の 1 辺の長さは，2310 の倍数でなければならない。
よって　　$33(14a+11b)=2310l$　(l は自然数)
両辺を 33 で割ると　　$14a+11b=70l$　……④
ゆえに，④ を満たす自然数 a，b が存在するような最小の自然数 l を求める。
④ から　　$11b=14(5l-a)$
11 と 14 は互いに素であり，b は自然数であるから

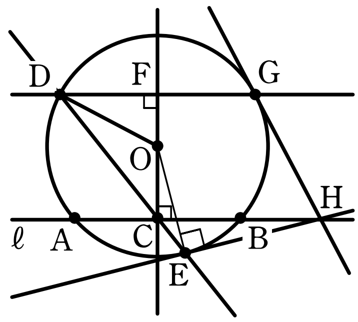
$$b=14m,\ 5l-a=11m\quad (m \text{ は自然数})$$

よって，$a=5l-11m$ であり，a も自然数であるから　　$5l-11m\geqq1$
ゆえに　　$m\leqq\dfrac{5l-1}{11}$
これを満たす自然数 m が存在するための条件は　　$1\leqq\dfrac{5l-1}{11}$
よって　　$l\geqq\dfrac{12}{5}$
これを満たす最小の自然数 l は　　$l=3$
このとき，$m\leqq\dfrac{5\cdot3-1}{11}=\dfrac{14}{11}$ より，$m=1$ であり　　$a=5\cdot3-11\cdot1=4$，$b=14$
したがって，④ を満たす自然数 a，b が存在するような最小の自然数 l は　　$l=3$
以上から，図 2 のような正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，1 辺の長さが $2310\cdot3={}^{ニヌネノ}6930$ のものである。

参考　求める正方形は，赤い長方形を横に 4 枚， 縦に 63 枚並べて，青い長方形を横に 14 枚， 縦に 45 枚並べてできるものである。

数学Ⅰ・A 第５問

(1) 手順１にしたがって作図を行うと，右の図のようになる。



直線 EH が円 O の接線であることを証明するためには，

$\angle\mathrm{OEH}=$ ${}^{アイ}90^\circ$ であることを示せばよい。

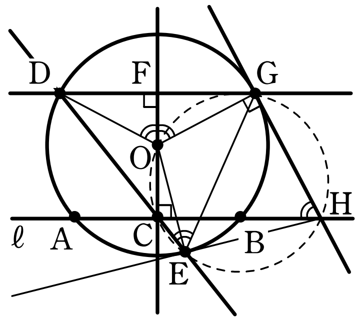
手順１の (Step 1) と (Step 4) により

$$\angle\mathrm{OCH}=\angle\mathrm{OGH}=90^\circ$$

よって，四角形 OCHG の対角の和は 180° であるから，

四角形 OCHG は円に内接する。

ゆえに，4 点 C，G，H，O は同一円周上にある。(^{ウ} ③)



また，四角形 OCHG が円に内接することから

$$\angle\mathrm{CHG}=\angle\mathrm{FOG}$$ (^{エ} ④)

$\mathrm{OF}\perp\mathrm{DG}$ より，$\triangle\mathrm{ODF}\equiv\triangle\mathrm{OGF}$ であるから

$$\angle\mathrm{FOG}=\angle\mathrm{FOD}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{DOG}$$

さらに，点 E は円 O の周上にあるから

$$\angle\mathrm{DOG}=2\angle\mathrm{DEG}$$

よって $\angle\mathrm{FOG}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{DOG}=\angle\mathrm{DEG}$ (^{オ} ③)

したがって，$\angle\mathrm{CHG}=\angle\mathrm{DEG}=\angle\mathrm{CEG}$ であるから，円周角の定理の逆により，

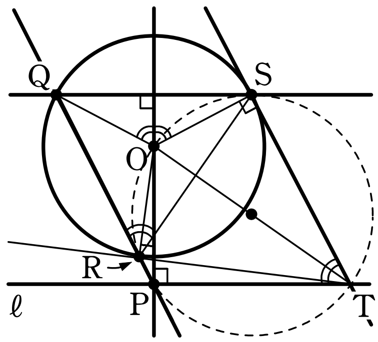
4 点 C，G，H，E は同一円周上にある。(^{カ} ②)

参考 3 点 C，G，H を通る円はただ１つしかないから，4 点 C，G，H，E を通る円は点 O も通る。すなわち，5 点 C，G，H，O，E は同一円周上にある。

したがって $\angle\mathrm{OEH}=\angle\mathrm{OCH}=90^\circ$

(2) (1) と同様に考える。

手順２にしたがって作図を行うと，右の図のようになる。



手順２の (Step 1) と (Step 4) により

$$\angle\mathrm{OPT}=\angle\mathrm{OST}=90^\circ$$

よって，四角形 OPTS の対角の和は 180° であるから，四角形 OPTS は円に内接する。

ゆえに，4 点 O，P，T，S は同一円周上にある。

また，四角形 OPTS が円に内接することと，$\mathrm{OP}\perp\mathrm{QS}$ から $\angle\mathrm{PTS}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{QOS}$

さらに，点 R は円 O の周上にあるから $\angle\mathrm{QOS}=2\angle\mathrm{QRS}$

よって $\angle\mathrm{PTS}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{QOS}=\angle\mathrm{QRS}$ (^{キ} ③)

ゆえに，四角形 PTSR は円に内接するから，4 点 O，P，T，S を通る円は点 R も通る。

すなわち，3 点 O，P，R を通る円は 2 点 T，S を通り，$\angle\mathrm{OPT}=\angle\mathrm{OST}=90^\circ$ であるから，線分 OT はその円の直径である。

したがって，3 点 O，P，R を通る円の半径は　$\dfrac{\mathrm{OT}}{2}=\dfrac{{}^{\text{ク}}3\sqrt{{}^{\text{ケ}}6}}{{}^{\text{コ}}2}$

また，$\angle\mathrm{ORT}=90^\circ$ であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{RT}=\sqrt{\mathrm{OT}^2-\mathrm{OR}^2}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{49}={}^{\text{サ}}7$$