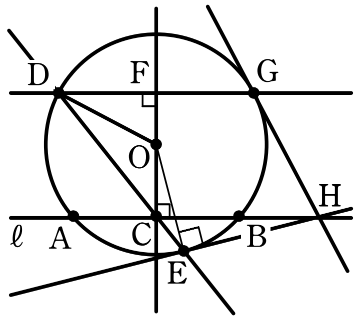
数学Ⅰ・A　第５問

(1)　手順 1 にしたがって作図を行うと，右の図のようになる。



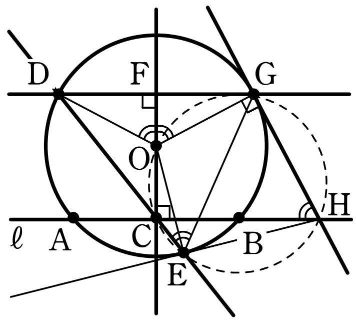
直線 EH が円 O の接線であることを証明するためには，

$\angle \mathrm{OEH} =$ ${}^{アイ}90^\circ$ であることを示せばよい。

手順 1 の (Step 1) と (Step 4) により

$$\angle \mathrm{OCH} = \angle \mathrm{OGH} = 90^\circ$$

よって，四角形 OCHG の対角の和は 180° であるから，四角形 OCHG は円に内接する。



ゆえに，4 点 C，G，H，O は同一円周上にある。$(^{ウ}$ ③$)$

また，四角形 OCHG が円に内接することから

$$\angle \mathrm{CHG} = \angle \mathrm{FOG} \quad (^{エ}\text{ ④})$$

$\mathrm{OF} \perp \mathrm{DG}$ より，$\triangle \mathrm{ODF} \equiv \triangle \mathrm{OGF}$ であるから

$$\angle \mathrm{FOG} = \angle \mathrm{FOD} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{DOG}$$

さらに，点 E は円 O の周上にあるから

$$\angle \mathrm{DOG} = 2\angle \mathrm{DEG}$$

よって　$\angle \mathrm{FOG} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{DOG} = \angle \mathrm{DEG}$　$(^{オ}$ ③$)$

したがって，$\angle \mathrm{CHG} = \angle \mathrm{DEG} = \angle \mathrm{CEG}$ であるから，円周角の定理の逆により，

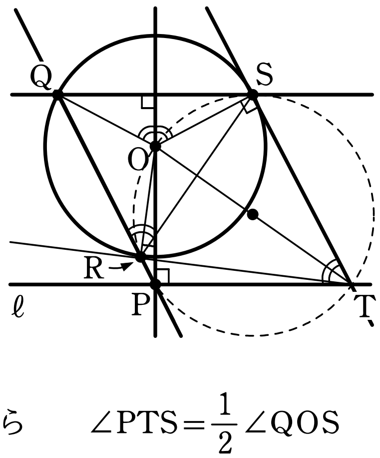
4 点 C，G，H，E は同一円周上にある。$(^{カ}$ ②$)$

参考　3 点 C，G，H を通る円はただ 1 つしかないから，4 点 C，G，H，E を通る円は点 O も通る。すなわち，5 点 C，G，H，O，E は同一円周上にある。

したがって　　$\angle \mathrm{OEH} = \angle \mathrm{OCH} = 90^\circ$

(2)　(1) と同様に考える。

手順 2 にしたがって作図を行うと，右の図のようになる。



手順 2 の (Step 1) と (Step 4) により

$$\angle \mathrm{OPT} = \angle \mathrm{OST} = 90^\circ$$

よって，四角形 OPTS の対角の和は 180° であるから，四角形 OPTS は円に内接する。

ゆえに，4 点 O，P，T，S は同一円周上にある。

また，四角形 OPTS が円に内接することと，$\mathrm{OP} \perp \mathrm{QS}$ から　　$\angle \mathrm{PTS} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{QOS}$

さらに，点 R は円 O の周上にあるから　　$\angle \mathrm{QOS} = 2\angle \mathrm{QRS}$

よって　$\angle \mathrm{PTS} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{QOS} = \angle \mathrm{QRS}$　$(^{キ}$ ③$)$

ゆえに，四角形 PTSR は円に内接するから，4 点 O，P，T，S を通る円は点 R も通る。

すなわち，3 点 O，P，R を通る円は 2 点 T，S を通り，$\angle \mathrm{OPT} = \angle \mathrm{OST} = 90^\circ$ であるから，線分 OT はその円の直径である。

したがって，3 点 O，P，R を通る円の半径は　$\dfrac{\mathrm{OT}}{2}=\dfrac{{}^{ク}3\sqrt{{}^{ケ}6}}{{}^{コ}2}$

また，$\angle \mathrm{ORT}=90^\circ$ であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{RT}=\sqrt{\mathrm{OT}^2-\mathrm{OR}^2}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{49}={}^{サ}7$$