数学Ⅰ･A　第４問

(1)　462 と 110 を素因数分解すると　$462=2\cdot3\cdot7\cdot11$，　$110=2\cdot5\cdot11$

よって，462 と 110 の両方を割り切る素数のうち最大のものは　$^{アイ}11$

図 1 のように赤い長方形を並べて作ることができる正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，1 辺の長さが 462 と 110 の最小公倍数のものである。

462 と 110 の最小公倍数は　$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=462\cdot5=^{ウエオカ}2310$

また，赤い長方形を横に x 枚，縦に y 枚並べて，正方形ではない長方形を作るとき，横の長さと縦の長さの差の絶対値は正であり，その値は

$$|462x-110y|=|2\cdot3\cdot7\cdot11x-2\cdot5\cdot11y|=22|21x-5y| \quad \cdots\cdots ①$$

このとき，$|21x-5y|$ の値は正の整数であり，$x=1$，$y=4$ とすると

$$21x-5y=21\cdot1-5\cdot4=1$$

したがって，① が最小となるのは，差の絶対値が $^{キク}22$ になるときである。

縦の長さが横の長さより 22 長い長方形を同様にして考えると　$110y=462x+22$

両辺を 22 で割って整理すると　$21x-5y=-1$　…… ②

$x=4$，$y=17$ は ② の整数解の 1 つであり　$21\cdot4-5\cdot17=-1$　…… ③

② − ③ から　$21(x-4)-5(y-17)=0$

21 と 5 は互いに素であるから　$x-4=5k$，$y-17=21k$　(k は整数)

すなわち　$x=5k+4$，$y=21k+17$　(k は整数)

x，y は自然数であるから　$k\geqq0$

よって，x は $k=0$ で最小値 4 をとる。

したがって，縦の長さが横の長さより 22 長い長方形のうち，横の長さが最小であるものの横の長さは　$462\cdot4=^{ケコサシ}1848$

(2)　図 2 のように赤い長方形と青い長方形を並べて作ることができる長方形を考えると，赤い長方形を並べてできる長方形の縦の長さと，青い長方形を並べてできる長方形の縦の長さは等しい。

よって，図 2 のような長方形のうち，縦の長さが最小のものは，縦の長さが 110 と 154 の最小公倍数のものである。

$110=2\cdot5\cdot11$，$154=2\cdot7\cdot11$ であるから，110 と 154 の最小公倍数は

$$2\cdot5\cdot7\cdot11=110\cdot7=^{スセソ}770$$

したがって，図 2 のように並べてできる長方形の縦の長さは 770 の倍数である。

また，462 と 363 の最大公約数は，$462=2\cdot3\cdot7\cdot11$，$363=3\cdot11^2$ から　$3\cdot11=^{タチ}33$

よって，図 2 のように並べて正方形を作るとき，赤い長方形を横に a 枚，青い長方形を横に b 枚並べてできる正方形の横の長さは　$462a+363b=33(14a+11b)$

33 の倍数のうち，770 の倍数でもある最小の正の整数は，33 と 770 の最小公倍数である。

$33=3\cdot11$，$770=2\cdot5\cdot7\cdot11$ であるから，33 と 770 の最小公倍数は

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=770\cdot3=^{ツテトナ}2310$$

したがって，図 2 のような正方形の 1 辺の長さは，2310 の倍数でなければならない。

よって　$33(14a+11b)=2310l$　(l は自然数)

両辺を 33 で割ると　　$14a+11b=70l$　……④

ゆえに，④ を満たす自然数 a，b が存在するような最小の自然数 l を求める。

④ から　　$11b=14(5l-a)$

11 と 14 は互いに素であり，b は自然数であるから

$$b=14m，5l-a=11m\quad (m \text{ は自然数})$$

よって，$a=5l-11m$ であり，a も自然数であるから　　$5l-11m \geqq 1$

ゆえに　　$m \leqq \dfrac{5l-1}{11}$

これを満たす自然数 m が存在するための条件は　　$1 \leqq \dfrac{5l-1}{11}$

よって　　$l \geqq \dfrac{12}{5}$

これを満たす最小の自然数 l は　　$l=3$

このとき，$m \leqq \dfrac{5\cdot 3-1}{11}=\dfrac{14}{11}$ より，$m=1$ であり　　$a=5\cdot 3-11\cdot 1=4$，$b=14$

したがって，④ を満たす自然数 a，b が存在するような最小の自然数 l は　　$l=3$

以上から，図 2 のような正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，1 辺の長さが $2310\cdot 3=$ ${}^{\text{ニヌネノ}}6930$ のものである。

参考　求める正方形は，赤い長方形を横に 4 枚，縦に 63 枚並べて，青い長方形を横に 14 枚，縦に 45 枚並べてできるものである。