数学Ⅰ・A 第１問〔2〕

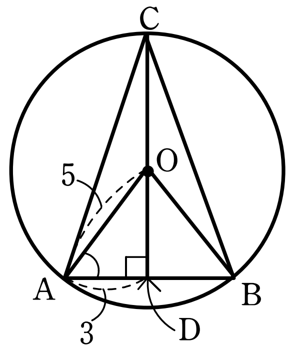
(1) (i) △ABC において，正弦定理により $\dfrac{6}{\sin\angle ACB}=2\cdot5$

よって $\sin\angle ACB=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ （サ ⓪）

$\angle ACB$ は鈍角であるから $\cos\angle ACB<0$

ゆえに $\cos\angle ACB=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5}$ （シ ⑦）

(ii) △ABC の面積が最大になるのは，右の図のように直線 CD が C，O，D の順になるときである。



このとき，AD＝3，AO＝5 であるから，△OAD において，三平方の定理により

$$\mathrm{OD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

よって $\tan\angle OAD=\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{4}{3}$ （ス ④）

また $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot(\mathrm{OD}+\mathrm{OC})$

$$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot(4+5)=^{\text{セソ}}27$$

(2) △PQR において，余弦定理により

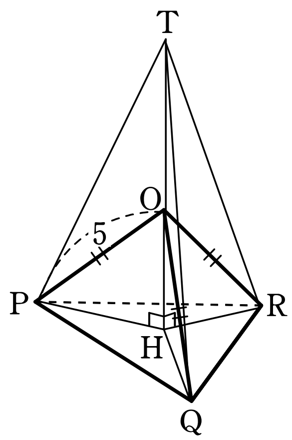
$$\cos\angle QPR=\frac{9^2+8^2-5^2}{2\cdot9\cdot8}=\frac{^{\text{タ}}5}{^{\text{チ}}6}$$

$\sin\angle QPR>0$ であるから $\sin\angle QPR=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

よって $\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\cdot9\cdot8\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}=^{\text{ツ}}6\sqrt{^{\text{テト}}11}$

次に，球 S の中心を O とする。

三角錐 TPQR の体積が最大になるのは，右の図のように直線 TH が T，O，H の順になるときである。



直角三角形 OPH，OQH，ORH は OP＝OQ＝OR＝5 であり，OH は共通であるから合同である。

よって PH＝QH＝RH （ナ ⑥）

△PQR において，PH は外接円の半径であるから

$$\frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle QPR}=2\mathrm{PH}$$

ゆえに $\mathrm{PH}=\dfrac{\mathrm{QR}}{2\sin\angle QPR}=\dfrac{5}{2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}}=\dfrac{15}{\sqrt{11}}$

△OPH において，三平方の定理により

$$\mathrm{OH}=\sqrt{5^2-\left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2}=\sqrt{\frac{50}{11}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

よって，三角錐 TPQR の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PQR}\cdot(\mathrm{OT}+\mathrm{OH})=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{11}\left(5+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)$$

$$=2(5\sqrt{11}+5\sqrt{2})$$

$$={}^{\text{ニヌ}}10\left(\sqrt{{}^{\text{ネノ}}11}+\sqrt{{}^{\text{ハ}}2}\right)$$