数学Ⅱ・B 第 1 問〔1〕

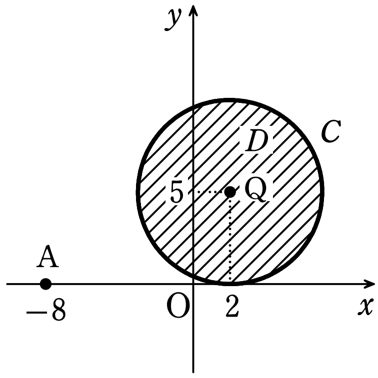
(1) 不等式を変形すると $(x-2)^2+(y-5)^2 \leqq 25$

よって，領域 D は中心が点 $(^{ア}2,\ ^{イ}5)$，半径が $^{ウ}5$ の円の周および内部である。(^{エ} ③)

以下，点 $(2,\ 5)$ を Q とし，方程式 $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ の表す図形を C とする。

(2) (i) (1) により，領域 D は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

右の図から，直線 $y={}^{オ}0$ は点 A を通る C の接線の 1 つとなることがわかる。



点 A を通り，傾きが k の直線を ℓ とする。

(ii) 直線 ℓ の方程式 $y=k(x+8)$ を円 C の方程式に代入して整理すると，x についての 2 次方程式

$$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$$

が得られる。

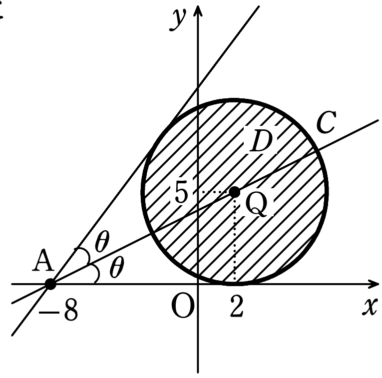
この方程式が重解をもつときの k の値が接線の傾きとなる。(^{カ} ⓪)

参考 実際には，直線 ℓ の方程式を円 C の方程式に代入して計算する必要があるが，問題文で与えられているため，共通テストでは省略してよい。

(iii) x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0<\theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta=\frac{5}{2-(-8)}=\frac{5}{10}=\frac{^{キ}1}{^{ク}2}$$

であり，直線 $y=0$ と異なる接線の傾きは $\tan 2\theta$ と表すことができる。(^{ケ} ①)



(iv) 点 A を通る C の接線のうち，直線 $y=0$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。

(太郎さんの考え方)

$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$ の判別式を D_1 とすると

$$\begin{aligned}\frac{D_1}{4}&=(8k^2-5k-2)^2-(k^2+1)(64k^2-80k+4)\\&=(64k^4+25k^2+4-80k^3+20k-32k^2)\\&\qquad-(64k^4-80k^3+4k^2+64k^2-80k+4)\\&=(64k^4-80k^3-7k^2+20k+4)-(64k^4-80k^3+68k^2-80k+4)\\&=(-7k^2+20k)-(68k^2-80k)\\&=-75k^2+100k=-25k(3k-4)\end{aligned}$$

重解をもつとき $D_1=0$ であるから $k=0,\ \frac{4}{3}$

$k_0 \neq 0$ であるから $k_0=\frac{^{コ}4}{^{サ}3}$

補足 太郎さんの考え方は 2 次方程式の導出も含めると計算が大変である。共通テストでは以下の花子さんの考え方で求めればよい。

(花子さんの考え方)

$$k_0=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{^{コ}4}{_{サ}3}$$

直線 ℓ と領域 D が共有点をもつような傾き k の値の範囲は $0\leqq k\leqq k_0$ である。(シ ⑤)

別解 (k_0 の求め方)

$y=k(x+8)$ から　　$kx-y+8k=0$

この直線が C と接するとき　　$\dfrac{|k\cdot 2-5+8k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=5$

すなわち　$\dfrac{|10k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=5$　　　よって　$|2k-1|=\sqrt{k^2+1}$

両辺を2乗すると　　$4k^2-4k+1=k^2+1$

整理すると　　$3k^2-4k=0$　　　すなわち　$k(3k-4)=0$

よって　　$k=0,\ \dfrac{4}{3}$　　　　　$k_0\fallingdotseq 0$ であるから　$k_0=\dfrac{4}{3}$

数学Ⅱ・B　第 1 問〔2〕

(1)　$\log_3 9=\log_3 3^2={}^{ア}2$

$\log_{\frac{1}{4}} x=-\dfrac{3}{2}$ とすると　　$x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=(2^{-2})^{-\frac{3}{2}}=2^{-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=2^3={}^{イ}8$

(2)　$\log_a b=t$ ……① とおく。

①から　　$a^t=b$　(ウ ①)

よって　　$a=b^{\frac{1}{t}}$　(エ ①)

したがって，$\log_b a=\dfrac{1}{t}$ ……② が成り立つことがわかる。

(3)　$t>\dfrac{1}{t}$ ……③ を満たす t ($t\fallingdotseq 0$) の値の範囲は　　$-1<t<0,\ 1<t$

$\log_a b>\log_b a$ ……④ を満たす実数 b ($b>0,\ b\fallingdotseq 1$) の値の範囲について考える。

(2)の結果により，$\log_a b=t$ とおくと，④は　　$t>\dfrac{1}{t}$

よって　　$-1<t<0,\ 1<t$

ゆえに　　$-1<\log_a b<0,\ 1<\log_a b$

すなわち　$\log_a\dfrac{1}{a}<\log_a b<\log_a 1,\ \log_a a<\log_a b$

$a>1$ のとき　　$\dfrac{1}{a}<b<1,\ a<b$　(オ ③)

$0<a<1$ のとき　$\dfrac{1}{a}>b>1,\ a>b$　　　よって　　$0<b<a,\ 1<b<\dfrac{1}{a}$　(カ ⓪)

(4)　まず，$\log_p q$ と $\log_q p$ の大小について考える。

$0<p<1$，$q>1$ であるから，$1<q<\dfrac{1}{p}$ が成り立つかどうかを調べる。

$$\frac{1}{p}-q=\frac{13}{12}-\frac{12}{11}=\frac{13\times11-12^2}{12\times11}=\frac{143-144}{12\times13}<0$$

$1<q<\dfrac{1}{p}$ が成り立たないから，$\log_p q>\log_q p$ は成り立たない。

よって　　$\log_p q<\log_q p$

次に，$\log_p r$ と $\log_r p$ の大小について考える。

$0<p<1$，$r>1$ であるから，$1<r<\dfrac{1}{p}$ が成り立つかどうかを調べる。

$$\frac{1}{p}-r=\frac{13}{12}-\frac{14}{13}=\frac{13^2-14\times12}{12\times13}=\frac{169-168}{12\times13}>0$$

$1<r<\dfrac{1}{p}$ が成り立つから，$\log_p r>\log_r p$ は成り立つ。

以上から　　$\log_p q<\log_q p$ かつ $\log_p r>\log_r p$　（キ ②）

参考　$\dfrac{1}{p}$ と q，$\dfrac{1}{p}$ と r の大小は次のようにして調べることもできる。

$$\frac{1}{p}-q=\frac{13}{12}-\frac{12}{11}=\left(1+\frac{1}{12}\right)-\left(1+\frac{1}{11}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{11}<0$$

$$\frac{1}{p}-r=\frac{13}{12}-\frac{14}{13}=\left(1+\frac{1}{12}\right)-\left(1+\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{13}>0$$

数学Ⅱ・B　第 2 問〔1〕

(1)　$f(x)=x^3-6ax+16$ から　　$f'(x)=3x^2-6a$

$a=0$ のとき　$f'(x)=3x^2\geqq0$

$f(x)$ は常に増加し，$x=0$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の傾きは 0 であるから，グラフの概形は　ア ①

$a<0$ のとき　$f'(x)=3x^2-6a>0$

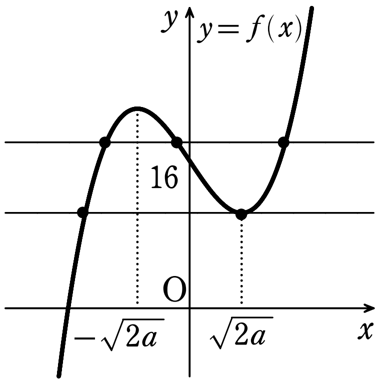
$f(x)$ は常に増加するから，グラフの概形は　イ ⓪

(2)　$a>0$ のとき，$f'(x)=0$ とすると　　$3x^2-6a=0$

よって　　$x=\pm\sqrt{2a}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2a}$	$\cdots$	$\sqrt{2a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$



ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。

また　$f(-\sqrt{2a})=-2a\sqrt{2a}+6a\sqrt{2a}+16$

$$=4a\sqrt{2a}+16=4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$$

$f(\sqrt{2a})=2a\sqrt{2a}-6a\sqrt{2a}+16$

$$=-4a\sqrt{2a}+16=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$$

よって，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が3個の共有点をもつような p の値の範囲は

$$-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16<p<4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$$　（ウ ③，エ ②）

$p=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ は2個の共有点をもつ。

このとき　$x^3-6ax+16=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

すなわち　$x^3-6ax+4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}=0$

この方程式が $x=\sqrt{2a}$ を重解にもつことに着目して，左辺を因数分解すると

$$(x-\sqrt{2a})^2(x+2\sqrt{2a})=0$$

よって　$x=\sqrt{2a}$，$-2\sqrt{2a}$

したがって　$q=$ オカ $-2\sqrt{{}^{キ}2}\,a^{\frac{1}{2}}$，$r=\sqrt{{}^{ク}2}\,a^{\frac{1}{2}}$

(3)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数 n は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の個数に一致する。

(1) により，$a\leqq 0$ のとき　$n=1$

(2) により，$a>0$ のとき極小値 $-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$ は a の値によって，正，0，負いずれの場合もあるから　$n=1$，2，3

よって，$n=1$ ならば　a はすべての実数

$n=2$ ならば　$a>0$

$n=3$ ならば　$a>0$

⓪　$n=1$ であっても $a=0$ や $a>0$ の場合があるから，正しくない。

①　正しい。

②　$n=2$ ならば $a>0$ であるから，正しくない。

③　$a<0$ ならば $n=1$ であるから，正しくない。

④　正しい。

⑤　$a>0$ であっても $n=1$，2 となる場合もあるから，正しくない。

以上から，正しいものは　ケ ①，コ ④　（またはケ ④，コ ①）

数学Ⅱ・B　第 2 問〔2〕

$g(x)-h(x)=x^3-3bx+3b^2-(x^3-x^2+b^2)$

$\qquad\qquad=x^2-3bx+2b^2=(x-b)(x-2b)$

よって，C_1 と C_2 の交点の x 座標は　　$x=b$，$2b$

$b>0$，$\alpha<\beta$ であるから　　$\alpha={}^{サ}b$，$\beta={}^{シス}2b$

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また，$t>\beta$ とし，

$\beta\leqq x\leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を T とする。

$b\leqq x\leqq 2b$ のとき $(x-b)(x-2b)\leqq 0$ であるから　$g(x)\leqq h(x)$

$2b\leqq x$ のとき $(x-b)(x-2b)\geqq 0$ であるから　$g(x)\geqq h(x)$

したがって　$S=\displaystyle\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx$　（^{セ} ②）

$T=\displaystyle\int_\beta^t\{g(x)-h(x)\}dx$　（^{ソ} ①）

$$S-T=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx-\int_\beta^t\{g(x)-h(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx+\int_\beta^t\{h(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^t\{h(x)-g(x)\}dx\quad（{}^{タ}\ ②）$$

よって　　$S-T=\displaystyle\int_b^t\{h(x)-g(x)\}dx=-\int_b^t(x^2-3bx+2b^2)dx$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}bx^2+2b^2x\right]_b^t$$

$$=-\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}bt^2+2b^2t\right)+\left(\frac{1}{3}b^3-\frac{3}{2}b^3+2b^3\right)$$

$$=-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}bt^2-2b^2t+\frac{5}{6}b^3$$

$$=\frac{{}^{チツ}-1}{{}^{テ}6}(2t^3-{}^{ト}9bt^2+{}^{ナニ}12b^2t-{}^{ヌ}5b^3)$$

$S=T$ となるのは $S-T=0$ のときであるから

$$2t^3-9bt^2+12b^2t-5b^3=0$$

左辺を $P(t)$ とおくと　　$P(b)=2b^3-9b^3+12b^3-5b^3=0$

ゆえに，$P(t)$ は $t-b$ を因数にもつ。

よって　　$P(t)=(t-b)(2t^2-7bt+5b^2)=(t-b)^2(2t-5b)$

$t>2b$ であるから　　$t=\dfrac{{}^{ネ}5}{{}^{ノ}2}b$

数学Ⅱ・B　第 3 問

(1)　A 地区で収穫されるジャガイモを母集団とし，1 個の重さが 200 g を超えるものの母比率が 0.25，無作為標本の大きさが 400 であるから，確率変数 Z は二項分布 $B(400,\ 0.^{\text{アイ}}25)$ に従う。

よって　　$E(Z)=400\times 0.25={}^{\text{ウエオ}}100$

(2)　(1) より，確率変数 Z は二項分布 $B(400,\ 0.25)$ に従うから

$$V(Z)=400\times 0.25\times(1-0.25)=75$$

よって　　$V(R)=V\left(\dfrac{Z}{400}\right)=\dfrac{1}{400^2}V(Z)=\dfrac{75}{400^2}$

ゆえに　　$\sigma(R)=\sqrt{V(R)}=\dfrac{\sqrt{75}}{400}=\dfrac{\sqrt{3}}{80}$　(${}^{\text{カ}}$ ②)

また，標本の大きさ 400 は十分に大きいので，R は近似的に正規分布 $N\left(0.25,\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{80}\right)^2\right)$ に従う。

このとき，$X=\dfrac{R-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}$ は $N(0,\ 1)$ に従うから　　$P(R\geqq x)=P\left(X\geqq\dfrac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right)$

ここで，$0.0465<0.5$ から $\dfrac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}>0$ で　　$P\left(X\geqq\dfrac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right)=0.5-p\left(\dfrac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right)$

よって　　$0.5-p\left(\dfrac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right)=0.0465$　　　ゆえに　　$p\left(\dfrac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right)=0.4535$

正規分布表から　　$\dfrac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}=1.68$

したがって　　$x=1.68\times\dfrac{1.73}{80}+0.25=0.28633\fallingdotseq 0.286$　(${}^{\text{キ}}$ ②)

(3)　X のとる値 x の範囲が $100\leqq x\leqq 300$ であるから　　$P(100\leqq X\leqq 300)={}^{\text{ク}}1$

ここで　　$P(100\leqq X\leqq 300)=\displaystyle\int_{100}^{300}f(x)\,dx=\int_{100}^{300}(ax+b)\,dx$

$$=\left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{100}^{300}=\frac{a}{2}(300^2-100^2)+b(300-100)$$

$$=40000a+200b$$

$P(100\leqq X\leqq 300)=1$ であるから　　${}^{\text{ケ}}4\cdot 10^4a+{}^{\text{コ}}2\cdot 10^2b=1$　……①

また　　$m=\dfrac{26}{3}\cdot 10^6a+4\cdot 10^4b=180$　……②

①$\times 2\cdot 10^2-$② から　　$8\cdot 10^6a-\dfrac{26}{3}\cdot 10^6a=2\cdot 10^2-180$

整理すると　　$-\dfrac{2}{3}\cdot 10^6a=20$　　　よって　　$a=-3\cdot 10^{-5}$

これを ① に代入すると　　$4\cdot 10^4\cdot(-3\cdot 10^{-5})+2\cdot 10^2b=1$

ゆえに　$2\cdot 10^2 b=2.2$　すなわち　$b=11\cdot 10^{-3}$

よって，確率密度関数は　$f(x)=-^{サ}3\cdot 10^{-5}x+^{シス}11\cdot 10^{-3}$

したがって，Ｂ地区で収穫され，出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが 200 g 以上であるものの割合は

$$\begin{aligned}P(200\leqq X\leqq 300)&=\int_{200}^{300}(-3\cdot 10^{-5}x+11\cdot 10^{-3})dx\\&=\left[-\frac{3}{2}\cdot 10^{-5}x^2+11\cdot 10^{-3}x\right]_{200}^{300}\\&=-\frac{3}{2}\cdot 10^{-5}(300^2-200^2)+11\cdot 10^{-3}(300-200)\\&=-\frac{15}{2}\cdot 10^{-1}+11\cdot 10^{-1}=-\frac{15}{20}+\frac{11}{10}=\frac{7}{20}=0.35\end{aligned}$$

よって，35 % あると見積もることができる。　(^セ ②)

参考　(m の計算)

$$m=\int_{100}^{300}xf(x)dx=\int_{100}^{300}x(ax+b)dx=\int_{100}^{300}(ax^2+bx)dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_{100}^{300}=\frac{a}{3}(300^3-100^3)+\frac{b}{2}(300^2-100^2)=\frac{26}{3}\cdot 10^6a+4\cdot 10^4b$$

数学Ⅱ･B　第 4 問

(1)　自転車が最初に自宅を出発するとき，歩行者との間隔は 2 である。自転車が歩行者を追いかけるときに，間隔が 1 分間に 1 ずつ縮まるから，自転車が最初に歩行者に追いつくのは出発してから 2 分後である。

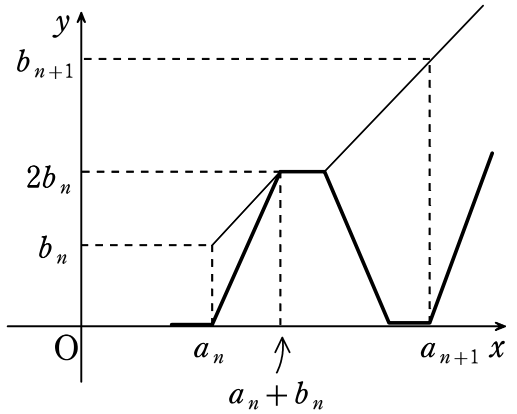
よって，自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は
(^ア4，4) である。

その後，自転車が自宅に戻るまでに要する移動時間は 2 分であり，停止している時間と合わせると，2 回目に自宅を出発するのは最初に歩行者に追いつく時刻の 4 分後である。

よって　$a_2=4+4=^{イ}8$

この 8 分の間に歩行者が移動した時間は，停止していた 1 分を除く 7 分である。

ゆえに　$b_2=^{ウ}7$



自転車が n 回目に自宅を出発するときを考える。自転車が出発するとき，歩行者の位置は b_n であるから，追いつくまでに要する移動時間は b_n 分である。

よって，自転車が歩行者に追いつく時刻は

$$x=a_n+b_n$$

自転車が b_n 分移動する間に，歩行者は b_n だけ移動するから，自転車が歩行者に追いつく位置は

$$y=b_n+b_n=2b_n$$

したがって，求める点の座標は　　$(a_n+b_n,\ 2b_n)$　(エ ③，オ ④)

この後，自転車が自宅に戻るのに要する移動時間は b_n 分であり，停止している時間と合わせると，$n+1$ 回目に自宅を出発するのは，n 回目に歩行者に追いつく時刻の b_n+2 分後である。

よって　　$a_{n+1}=a_n+b_n+b_n+2=a_n+{}^{カ}2b_n+{}^{キ}2$　…… ①

自転車が n 回目に歩行者に追いついてから $n+1$ 回目に自宅を出発するまでの b_n+2 分の間に，歩行者が移動した時間は，停止していた 1 分を除く b_n+1 分である。

ゆえに　　$b_{n+1}=2b_n+b_n+1=3b_n+{}^{ク}1$　…… ②

② を変形すると　　$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$

数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $b_1+\dfrac{1}{2}=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$，公比 3 の等比数列であるから

$b_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}\cdot 3^{n-1}$　　　よって　　$b_n=\dfrac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\dfrac{1}{2}$　(ケ ⑦)

この結果を ① に代入すると　　$a_{n+1}=a_n+2\left(\dfrac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)+2=a_n+5\cdot 3^{n-1}+1$

ゆえに，$a_{n+1}-a_n=5\cdot 3^{n-1}+1$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は $5\cdot 3^{n-1}+1$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(5\cdot 3^{k-1}+1)=2+\frac{5(3^{n-1}-1)}{3-1}+n-1$$

$$=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}+n-\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots ③$$

$n=1$ のとき　　$\dfrac{5}{2}\cdot 3^0+1-\dfrac{3}{2}=2$

$a_1=2$ であるから，③ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　　$a_n=\dfrac{5}{2}\cdot 3^{n-1}+n-\dfrac{3}{2}$　(コ ⑨)

(2)　歩行者が $y=300$ の位置に到達するまでに，自転車が歩行者に k 回追いつくとする。
自転車が k 回目に歩行者に追いつく位置は $2b_k$ であるから，k は $2b_k\leqq 300$ すなわち $b_k\leqq 150$ を満たす最大の整数である。

$k=4$ のとき　　$b_4=\dfrac{5}{2}\cdot 3^3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{134}{2}=67\leqq 150$

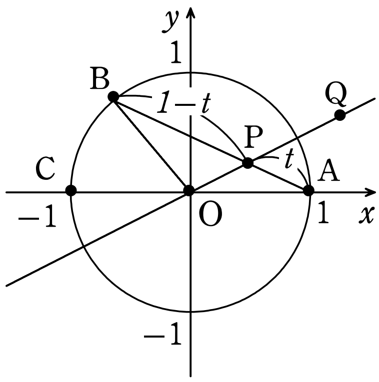
$k=5$ のとき　　$b_5=\dfrac{5}{2}\cdot 3^4-\dfrac{1}{2}=\dfrac{404}{2}=202>150$

よって　　$k={}^{サ}4$

また，4 回目に自転車が歩行者に追いつく時刻は

$$x=a_4+b_4=\left(\frac{5}{2}\cdot 3^3+4-\frac{3}{2}\right)+67=70+67={}^{シスセ}137$$

数学Ⅱ・B　第５問



(1)　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ であるから

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{{}^{アイ}-2}{{}^{ウ}3}$$

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ であり，実数 k を用いて，

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ と表せるから

$$\overrightarrow{OQ}=k\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}$$

$$=(k-kt)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}\quad\cdots\cdots ①\quad({}^{エ}①，{}^{オ}⓪)$$

また　$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}$

$$=(k-kt+1)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}\quad({}^{カ}④，{}^{キ}⓪)$$

ここで　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1-t)|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$$=(1-t)-\frac{2}{3}t=1-\frac{5}{3}t$$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OP}$ のとき $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ であるから　$1-\frac{5}{3}t=0$

よって　$t=\frac{{}^{ク}3}{{}^{ケ}5}$

(2)　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$$=-(k-kt+1)|\overrightarrow{OA}|^2-kt\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$=-(k-kt+1)+\frac{2}{3}kt=\left(\frac{5}{3}t-1\right)k-1$$

$\angle OCQ$ が直角であるから　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$

よって　$\left(\frac{5}{3}t-1\right)k-1=0$

ゆえに　$k=\dfrac{1}{\frac{5}{3}t-1}=\dfrac{{}^{コ}3}{{}^{サ}5t-{}^{シ}3}\quad\cdots\cdots ②$

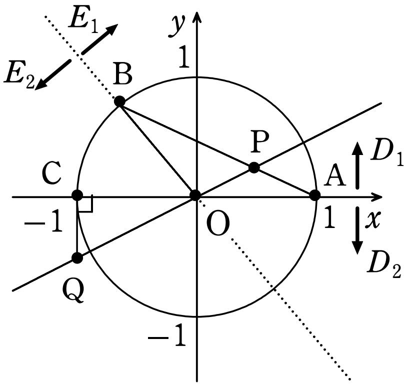
$0<t<\frac{3}{5}$ のとき，② から　$k<0$

よって，Q は O に関して P と反対側で，D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる。　$({}^{ス}③)$

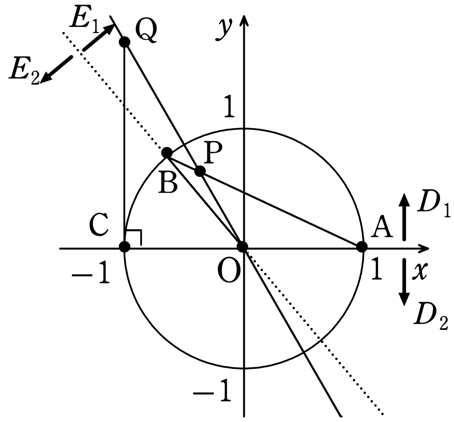
$\frac{3}{5}<t<1$ のとき，② から　$k>0$

よって，Q は O に関して P と同じ側で，D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる。　$({}^{セ}⓪)$

$k<0$ のとき



$k>0$ のとき



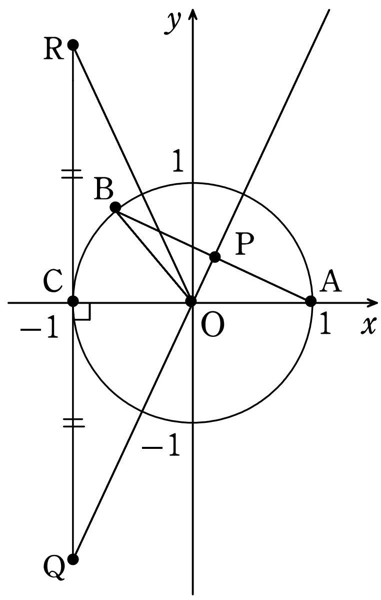
(3)　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，② から　　$k=-6$

① に代入して　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって　　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=9(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2)=9\left(1-\dfrac{4}{3}+1\right)=6$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{{}^{\text{ソ}}6}$

直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CR}}&={}^{\text{タ}}-\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\\&=-(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=-(-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\overrightarrow{\mathrm{OB}})-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&={}^{\text{チ}}2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+{}^{\text{ツ}}3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

となる。

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{CR}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}=(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}})-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$$

したがって　　$t=\dfrac{{}^{\text{テ}}3}{{}^{\text{ト}}4}$