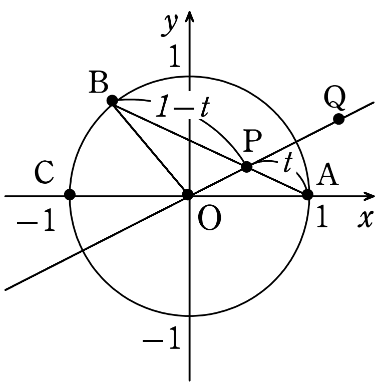
数学Ⅱ・B　第 5 問



(1)　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ であるから

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{{}^{アイ}-2}{{}^{ウ}3}$$

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ であり，実数 k を用いて，

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ と表せるから

$$\overrightarrow{OQ}=k\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}$$

$$=(k-kt)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}\quad\cdots\cdots①$$　$({}^{エ}\,①,\ {}^{オ}\,⓪)$

また　$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}$

$$=(k-kt+1)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}$$　$({}^{カ}\,④,\ {}^{キ}\,⓪)$

ここで　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1-t)|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$$=(1-t)-\frac{2}{3}t=1-\frac{5}{3}t$$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OP}$ のとき $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ であるから　$1-\dfrac{5}{3}t=0$

よって　$t=\dfrac{{}^{ク}3}{{}^{ケ}5}$

(2)　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$$=-(k-kt+1)|\overrightarrow{OA}|^2-kt\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$=-(k-kt+1)+\frac{2}{3}kt=\left(\frac{5}{3}t-1\right)k-1$$

$\angle OCQ$ が直角であるから　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$

よって　$\left(\dfrac{5}{3}t-1\right)k-1=0$

ゆえに　$k=\dfrac{1}{\dfrac{5}{3}t-1}=\dfrac{{}^{コ}3}{{}^{サ}5t-{}^{シ}3}\quad\cdots\cdots②$

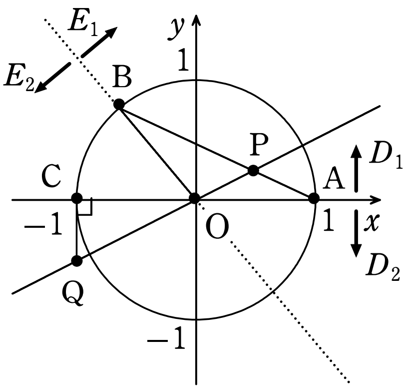
$0<t<\dfrac{3}{5}$ のとき，② から　$k<0$

よって，Q は O に関して P と反対側で，D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる。　$({}^{ス}\,③)$

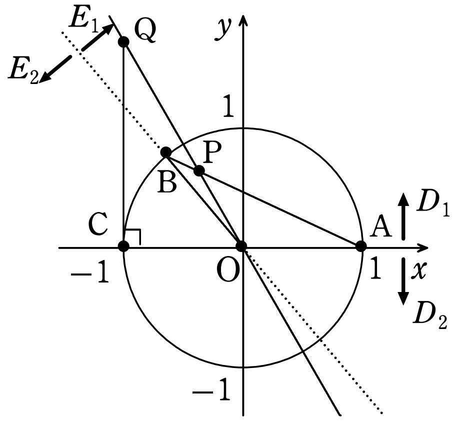
$\dfrac{3}{5}<t<1$ のとき，② から　$k>0$

よって，Q は O に関して P と同じ側で，D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる。　$({}^{セ}\,⓪)$

$k<0$ のとき



$k>0$ のとき



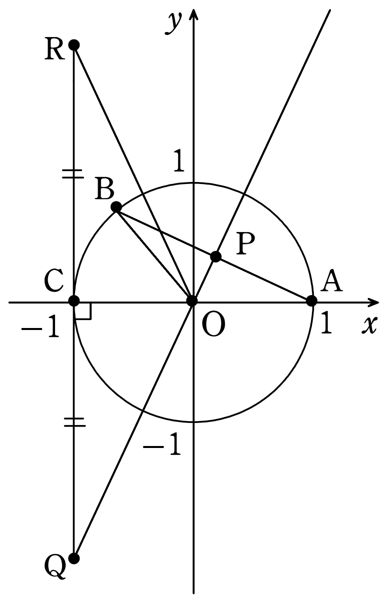
(3)　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，② から　　$k=-6$

① に代入して　　$\overrightarrow{OQ}=-3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$

よって　　$|\overrightarrow{OQ}|^2=9(|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2)=9\left(1-\dfrac{4}{3}+1\right)=6$

ゆえに　　$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{{}^{\text{ソ}}6}$

直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{CR}&={}^{\text{タ}}-\overrightarrow{CQ}\\&=-(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC})=-\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}\\&=-(-3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OA}\\&={}^{\text{チ}}2\overrightarrow{OA}+{}^{\text{ツ}}3\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となる。

よって　　$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{CR}-\overrightarrow{CO}=(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OA}$

$$=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{4}$$

したがって　　$t=\dfrac{{}^{\text{テ}}3}{{}^{\text{ト}}4}$