

## 数学Ⅱ・B 第4問

- (1) 自転車が最初に自宅を出発するとき、歩行者との間隔は2である。自転車が歩行者を追いかけるときに、間隔が1分間に1ずつ縮まるから、自転車が最初に歩行者に追いつくのは出発してから2分後である。

よって、自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は (ア4, 4) である。

その後、自転車が自宅に戻るまでに要する移動時間は2分であり、停止している時間と合わせると、2回目に自宅を出発するのは最初に歩行者に追いつく時刻の4分後である。

よって  $a_2 = 4 + 4 = 8$

この8分の間に歩行者が移動した時間は、停止していた1分を除く7分である。

ゆえに  $b_2 = 7$

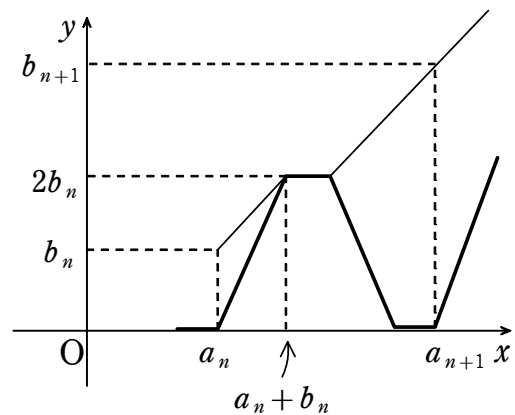
自転車が  $n$  回目に自宅を出発するときを考える。自転車が自宅を出発するとき、歩行者の位置は  $b_n$  であるから、追いつくまでに要する移動時間は  $b_n$  分である。

よって、自転車が歩行者に追いつく時刻は

$$x = a_n + b_n$$

自転車が  $b_n$  分移動する間に、歩行者は  $b_n$  だけ移動するから、自転車が歩行者に追いつく位置は

$$y = b_n + b_n = 2b_n$$



したがって、求める点の座標は  $(a_n + b_n, 2b_n)$  (エ③, オ④)

この後、自転車が自宅に戻るのに要する移動時間は  $b_n$  分であり、停止している時間と合わせると、 $n+1$  回目に自宅を出発するのは、 $n$  回目に歩行者に追いつく時刻の  $b_n + 2$  分後である。

よって  $a_{n+1} = a_n + b_n + b_n + 2 = a_n + 2b_n + 2$  …… ①

自転車が  $n$  回目に歩行者に追いついてから  $n+1$  回目に自宅を出発するまでの  $b_n + 2$  分の間に、歩行者が移動した時間は、停止していた1分を除く  $b_n + 1$  分である。

ゆえに  $b_{n+1} = 2b_n + b_n + 1 = 3b_n + 1$  …… ②

②を変形すると  $b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right)$

数列  $\left\{b_n + \frac{1}{2}\right\}$  は初項  $b_1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ 、公比3の等比数列であるから

$$b_n + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad b_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \quad (\text{ケ⑦})$$

この結果を①に代入すると  $a_{n+1} = a_n + 2\left(\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}\right) + 2 = a_n + 5 \cdot 3^{n-1} + 1$

ゆえに、 $a_{n+1} - a_n = 5 \cdot 3^{n-1} + 1$  より、数列  $\{a_n\}$  の階差数列の第  $n$  項は  $5 \cdot 3^{n-1} + 1$  で

あるから、 $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (5 \cdot 3^{k-1} + 1) = 2 + \frac{5(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} + n - 1 \\ &= \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n - \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$n=1 \text{ のとき} \quad \frac{5}{2} \cdot 3^0 + 1 - \frac{3}{2} = 2$$

$a_1 = 2$  であるから、 $\textcircled{3}$  は  $n=1$  のときも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + n - \frac{3}{2} \quad (\square \textcircled{9})$$

- (2) 歩行者が  $y=300$  の位置に到達するまでに、自転車が歩行者に  $k$  回追いつくとする。自転車が  $k$  回目に歩行者に追いつく位置は  $2b_k$  であるから、 $k$  は  $2b_k \leq 300$  すなわち  $b_k \leq 150$  を満たす最大の整数である。

$$k=4 \text{ のとき} \quad b_4 = \frac{5}{2} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} = \frac{134}{2} = 67 \leq 150$$

$$k=5 \text{ のとき} \quad b_5 = \frac{5}{2} \cdot 3^4 - \frac{1}{2} = \frac{404}{2} = 202 > 150$$

よって  $k=4$

また、4 回目に自転車が歩行者に追いつく時刻は

$$x = a_4 + b_4 = \left( \frac{5}{2} \cdot 3^3 + 4 - \frac{3}{2} \right) + 67 = 70 + 67 = \text{シスセ}137$$