

数学Ⅱ・B 第3問

- (1) A地区で収穫されるジャガイモを母集団とし、1個の重さが200gを超えるものの母比率が0.25、無作為標本の大きさが400であるから、確率変数 Z は二項分布 $B(400, 0.25)$ に従う。

$$\text{よって } E(Z) = 400 \times 0.25 = 100$$

- (2) (1)より、確率変数 Z は二項分布 $B(400, 0.25)$ に従うから

$$V(Z) = 400 \times 0.25 \times (1 - 0.25) = 75$$

$$\text{よって } V(R) = V\left(\frac{Z}{400}\right) = \frac{1}{400^2} V(Z) = \frac{75}{400^2}$$

$$\text{ゆえに } \sigma(R) = \sqrt{V(R)} = \frac{\sqrt{75}}{400} = \frac{\sqrt{3}}{80} \quad (\text{カ } \textcircled{2})$$

また、標本の大きさ400は十分に大きいので、 R は近似的に正規分布

$$N\left(0.25, \left(\frac{\sqrt{3}}{80}\right)^2\right) \text{ に従う。}$$

$$\text{このとき, } X = \frac{R - 0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}} \text{ は } N(0, 1) \text{ に従うから } P(R \geq x) = P\left(X \geq \frac{x - 0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right)$$

$$\text{ここで, } 0.0465 < 0.5 \text{ から } \frac{x - 0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}} > 0 \text{ で } P\left(X \geq \frac{x - 0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right) = 0.5 - p\left(\frac{x - 0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right)$$

$$\text{よって } 0.5 - p\left(\frac{x - 0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right) = 0.0465 \quad \text{ゆえに } p\left(\frac{x - 0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right) = 0.4535$$

$$\text{正規分布表から } \frac{x - 0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}} = 1.68$$

$$\text{したがって } x = 1.68 \times \frac{\sqrt{3}}{80} + 0.25 = 0.28633 \approx 0.286 \quad (\text{キ } \textcircled{2})$$

- (3) X のとり値 x の範囲が $100 \leq x \leq 300$ であるから $P(100 \leq X \leq 300) = 1$

$$\begin{aligned} \text{ここで } P(100 \leq X \leq 300) &= \int_{100}^{300} f(x) dx = \int_{100}^{300} (ax + b) dx \\ &= \left[\frac{a}{2} x^2 + bx \right]_{100}^{300} = \frac{a}{2} (300^2 - 100^2) + b(300 - 100) \\ &= 40000a + 200b \end{aligned}$$

$$P(100 \leq X \leq 300) = 1 \text{ であるから } 4 \cdot 10^4 a + 2 \cdot 10^2 b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } m = \frac{26}{3} \cdot 10^6 a + 4 \cdot 10^4 b = 180 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2 \cdot 10^2 - \textcircled{2} \text{ から } 8 \cdot 10^6 a - \frac{26}{3} \cdot 10^6 a = 2 \cdot 10^2 - 180$$

$$\text{整理すると } -\frac{2}{3} \cdot 10^6 a = 20 \quad \text{よって } a = -3 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると } 4 \cdot 10^4 \cdot (-3 \cdot 10^{-5}) + 2 \cdot 10^2 b = 1$$

ゆえに $2 \cdot 10^2 b = 2.2$ すなわち $b = 11 \cdot 10^{-3}$

よって、確率密度関数は $f(x) = -3 \cdot 10^{-5} x + 11 \cdot 10^{-3}$

したがって、B地区で収穫され、出荷される予定のすべてのジャガイモのうち、重さが200 g以上であるものの割合は

$$\begin{aligned} P(200 \leq X \leq 300) &= \int_{200}^{300} (-3 \cdot 10^{-5} x + 11 \cdot 10^{-3}) dx \\ &= \left[-\frac{3}{2} \cdot 10^{-5} x^2 + 11 \cdot 10^{-3} x \right]_{200}^{300} \\ &= -\frac{3}{2} \cdot 10^{-5} (300^2 - 200^2) + 11 \cdot 10^{-3} (300 - 200) \\ &= -\frac{15}{2} \cdot 10^{-1} + 11 \cdot 10^{-1} = -\frac{15}{20} + \frac{11}{10} = \frac{7}{20} = 0.35 \end{aligned}$$

よって、35% であると見積もることができる。 (セ ②)

参考 (m の計算)

$$\begin{aligned} m &= \int_{100}^{300} x f(x) dx = \int_{100}^{300} x(ax + b) dx = \int_{100}^{300} (ax^2 + bx) dx \\ &= \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 \right]_{100}^{300} = \frac{a}{3} (300^3 - 100^3) + \frac{b}{2} (300^2 - 100^2) = \frac{26}{3} \cdot 10^6 a + 4 \cdot 10^4 b \end{aligned}$$