数学Ⅱ･B　第 2 問〔2〕

$g(x)-h(x)=x^3-3bx+3b^2-(x^3-x^2+b^2)$

$\quad =x^2-3bx+2b^2=(x-b)(x-2b)$

よって，C_1 と C_2 の交点の x 座標は　　$x=b$，$2b$

$b>0$，$\alpha<\beta$ であるから　　$\alpha={}^{サ}b$，$\beta={}^{シス}2b$

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また，$t>\beta$ とし，

$\beta\leqq x\leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を T とする。

$b\leqq x\leqq 2b$ のとき $(x-b)(x-2b)\leqq 0$ であるから　$g(x)\leqq h(x)$

$2b\leqq x$ のとき $(x-b)(x-2b)\geqq 0$ であるから　$g(x)\geqq h(x)$

したがって　$S=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx$　（^{セ} ②）

$T=\int_\beta^t\{g(x)-h(x)\}dx$　（^{ソ} ①）

$$S-T=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx-\int_\beta^t\{g(x)-h(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\{h(x)-g(x)\}dx+\int_\beta^t\{h(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^t\{h(x)-g(x)\}dx$$（^{タ} ②）

よって　　$S-T=\int_b^t\{h(x)-g(x)\}dx=-\int_b^t(x^2-3bx+2b^2)dx$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}bx^2+2b^2x\right]_b^t$$

$$=-\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}bt^2+2b^2t\right)+\left(\frac{1}{3}b^3-\frac{3}{2}b^3+2b^3\right)$$

$$=-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}bt^2-2b^2t+\frac{5}{6}b^3$$

$$=\frac{{}^{チツ}-1}{{}^{テ}6}(2t^3-{}^{ト}9bt^2+{}^{ナニ}12b^2t-{}^{ヌ}5b^3)$$

$S=T$ となるのは $S-T=0$ のときであるから

$$2t^3-9bt^2+12b^2t-5b^3=0$$

左辺を $P(t)$ とおくと　　$P(b)=2b^3-9b^3+12b^3-5b^3=0$

ゆえに，$P(t)$ は $t-b$ を因数にもつ。

よって　　$P(t)=(t-b)(2t^2-7bt+5b^2)=(t-b)^2(2t-5b)$

$t>2b$ であるから　　$t=\frac{{}^{ネ}5}{{}^{ノ}2}b$