数学Ⅱ・B　第 2 問〔1〕

(1)　$f(x)=x^3-6ax+16$ から　　$f'(x)=3x^2-6a$

$a=0$ のとき　$f'(x)=3x^2 \geqq 0$

$f(x)$ は常に増加し，$x=0$ における $y=f(x)$ のグラフの接線の傾きは 0 であるから，

グラフの概形は　ア ①

$a<0$ のとき　$f'(x)=3x^2-6a>0$

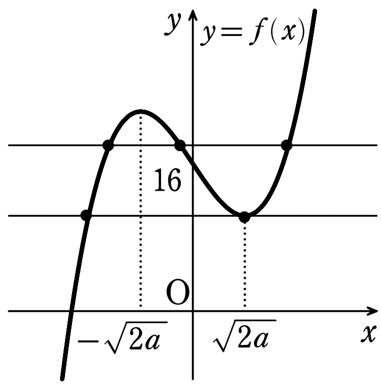
$f(x)$ は常に増加するから，グラフの概形は　イ ⓪

(2)　$a>0$ のとき，$f'(x)=0$ とすると　　$3x^2-6a=0$

よって　　$x=\pm\sqrt{2a}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2a}$	$\cdots$	$\sqrt{2a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。

また　$f(-\sqrt{2a})=-2a\sqrt{2a}+6a\sqrt{2a}+16$

$$=4a\sqrt{2a}+16=4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$$

$f(\sqrt{2a})=2a\sqrt{2a}-6a\sqrt{2a}+16$

$$=-4a\sqrt{2a}+16=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$$

よって，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲は

$$-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16<p<4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$$　（ウ ③，エ ②）

$p=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ は 2 個の共有点をもつ。

このとき　　$x^3-6ax+16=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

すなわち　　$x^3-6ax+4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}=0$

この方程式が $x=\sqrt{2a}$ を重解にもつことに着目して，左辺を因数分解すると

$$(x-\sqrt{2a})^2(x+2\sqrt{2a})=0$$

よって　　$x=\sqrt{2a}$，$-2\sqrt{2a}$

したがって　　$q=$ オカ $-2\sqrt{{}^{キ}2}\,a^{\frac{1}{2}}$，$r=\sqrt{{}^{ク}2}\,a^{\frac{1}{2}}$

(3)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数 n は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の個数に一致する。

(1) により，$a \leqq 0$ のとき　　$n=1$

(2) により，$a>0$ のとき極小値 $-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$ は a の値によって，正，0，負いずれの場合もあるから　　$n=1$，2，3

よって，$n=1$ ならば　a はすべての実数

$n=2$ ならば　$a>0$

$n=3$ ならば　$a>0$

⓪　$n=1$ であっても $a=0$ や $a>0$ の場合があるから，正しくない。

①　正しい。

②　$n=2$ ならば $a>0$ であるから，正しくない。

③　$a<0$ ならば $n=1$ であるから，正しくない。

④　正しい。

⑤　$a>0$ であっても $n=1$，2 となる場合もあるから，正しくない。

以上から，正しいものは　ケ①，コ④　（またはケ④，コ①）