数学Ⅱ・B 第 1 問〔2〕

(1) $\log_3 9=\log_3 3^2={}^{ア}2$

$\log_{\frac{1}{4}} x=-\dfrac{3}{2}$ とすると $x=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=(2^{-2})^{-\frac{3}{2}}=2^{-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=2^3={}^{イ}8$

(2) $\log_a b=t$ ……① とおく。

①から $a^t=b$ $({}^{ウ}$ ①$)$

よって $a=b^{\frac{1}{t}}$ $({}^{エ}$ ①$)$

したがって，$\log_b a=\dfrac{1}{t}$ ……② が成り立つことがわかる。

(3) $t>\dfrac{1}{t}$ ……③ を満たす t $(t\fallingdotseq 0)$ の値の範囲は $-1<t<0,\ 1<t$

$\log_a b>\log_b a$ ……④ を満たす実数 b $(b>0,\ b\fallingdotseq 1)$ の値の範囲について考える。

(2)の結果により，$\log_a b=t$ とおくと，④は $t>\dfrac{1}{t}$

よって $-1<t<0,\ 1<t$

ゆえに $-1<\log_a b<0,\ 1<\log_a b$

すなわち $\log_a \dfrac{1}{a}<\log_a b<\log_a 1,\ \log_a a<\log_a b$

$a>1$ のとき $\dfrac{1}{a}<b<1,\ a<b$ $({}^{オ}$ ③$)$

$0<a<1$ のとき $\dfrac{1}{a}>b>1,\ a>b$ よって $0<b<a,\ 1<b<\dfrac{1}{a}$ $({}^{カ}$ ⓪$)$

(4) まず，$\log_p q$ と $\log_q p$ の大小について考える。

$0<p<1,\ q>1$ であるから，$1<q<\dfrac{1}{p}$ が成り立つかどうかを調べる。

$$\frac{1}{p}-q=\frac{13}{12}-\frac{12}{11}=\frac{13\times 11-12^2}{12\times 11}=\frac{143-144}{12\times 13}<0$$

$1<q<\dfrac{1}{p}$ が成り立たないから，$\log_p q>\log_q p$ は成り立たない。

よって $\log_p q<\log_q p$

次に，$\log_p r$ と $\log_r p$ の大小について考える。

$0<p<1,\ r>1$ であるから，$1<r<\dfrac{1}{p}$ が成り立つかどうかを調べる。

$$\frac{1}{p}-r=\frac{13}{12}-\frac{14}{13}=\frac{13^2-14\times 12}{12\times 13}=\frac{169-168}{12\times 13}>0$$

$1<r<\dfrac{1}{p}$ が成り立つから，$\log_p r>\log_r p$ は成り立つ。

以上から $\log_p q<\log_q p$ かつ $\log_p r>\log_r p$ $({}^{キ}$ ②$)$

参考 $\dfrac{1}{p}$ と q，$\dfrac{1}{p}$ と r の大小は次のようにして調べることもできる。

$$\frac{1}{p}-q=\frac{13}{12}-\frac{12}{11}=\left(1+\frac{1}{12}\right)-\left(1+\frac{1}{11}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{11}<0$$

$$\frac{1}{p}-r=\frac{13}{12}-\frac{14}{13}=\left(1+\frac{1}{12}\right)-\left(1+\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{13}>0$$