数学Ⅱ・B　第 1 問〔1〕

(1)　不等式を変形すると　　$(x-2)^2+(y-5)^2 \leqq 25$

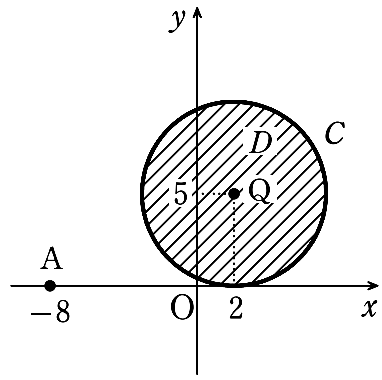
よって，領域 D は中心が点 (ア2，イ5)，半径がウ5 の円の周および内部である。(エ ③)

以下，点 (2，5) を Q とし，方程式 $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ の表す図形を C とする。

(2)　(i)　(1) により，領域 D は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

右の図から，直線 $y=$オ0 は点 A を通る C の接線の 1 つとなることがわかる。



点 A を通り，傾きが k の直線を ℓ とする。

(ii)　直線 ℓ の方程式 $y=k(x+8)$ を円 C の方程式に代入して整理すると，x についての 2 次方程式

$$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$$

が得られる。

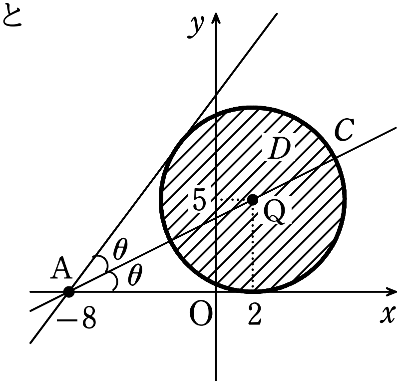
この方程式が重解をもつときの k の値が接線の傾きとなる。(カ ⓪)

参考　実際には，直線 ℓ の方程式を円 C の方程式に代入して計算する必要があるが，問題文で与えられているため，共通テストでは省略してよい。

(iii)　x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta=\frac{5}{2-(-8)}=\frac{5}{10}=\frac{{}^{キ}1}{{}^{ク}2}$$

であり，直線 $y=0$ と異なる接線の傾きは $\tan 2\theta$ と表すことができる。(ケ ①)



(iv)　点 A を通る C の接線のうち，直線 $y=0$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。

(太郎さんの考え方)

$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$ の判別式を D_1 とすると

$$\begin{aligned}
\frac{D_1}{4}&=(8k^2-5k-2)^2-(k^2+1)(64k^2-80k+4)\\
&=(64k^4+25k^2+4-80k^3+20k-32k^2)\\
&\qquad-(64k^4-80k^3+4k^2+64k^2-80k+4)\\
&=(64k^4-80k^3-7k^2+20k+4)-(64k^4-80k^3+68k^2-80k+4)\\
&=(-7k^2+20k)-(68k^2-80k)\\
&=-75k^2+100k=-25k(3k-4)
\end{aligned}$$

重解をもつとき $D_1=0$ であるから　　$k=0,\ \dfrac{4}{3}$

$k_0 \neq 0$ であるから　　$k_0=\dfrac{{}^{コ}4}{{}^{サ}3}$

補足　太郎さんの考え方は 2 次方程式の導出も含めると計算が大変である。共通テストでは以下の花子さんの考え方で求めればよい。

(花子さんの考え方)

$$k_0=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{^{コ}4}{^{サ}3}$$

直線 ℓ と領域 D が共有点をもつような傾き k の値の範囲は $0\leqq k\leqq k_0$ である。(^{シ} ⑤)

$\boxed{\text{別解}}$ (k_0 の求め方)

$y=k(x+8)$ から　　$kx-y+8k=0$

この直線が C と接するとき　　$\dfrac{|k\cdot 2-5+8k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=5$

すなわち　$\dfrac{|10k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=5$　　　よって　$|2k-1|=\sqrt{k^2+1}$

両辺を 2 乗すると　　$4k^2-4k+1=k^2+1$

整理すると　　$3k^2-4k=0$　　　すなわち　$k(3k-4)=0$

よって　　$k=0,\ \dfrac{4}{3}$　　　　　$k_0\fallingdotseq 0$ であるから　$k_0=\dfrac{4}{3}$