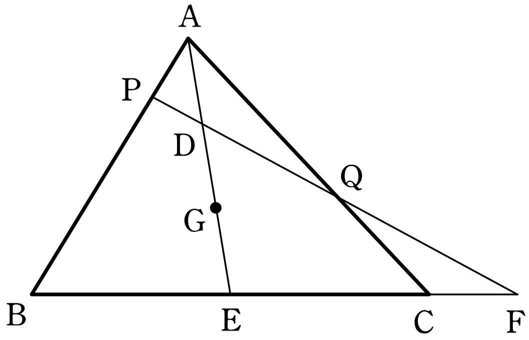
数学Ⅰ・A　第５問

(1)　点 G は △ABC の重心であり，点 D は線分 AG の中点であるから

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DG}:\mathrm{GE}=1:1:1$$



よって　$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}}=\dfrac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}2}$

△ABE と直線 PF にメネラウスの定理を用いると　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}}\cdot\dfrac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DA}}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}$　……①

$=^{\text{ウ}}2\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}$　(${}^{\text{エ}}$①，${}^{\text{オ}}$③)

△ACE と直線 DF にメネラウスの定理を用いると　$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FE}}\cdot\dfrac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DA}}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}$　……②

$=^{\text{カ}}2\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}$　(${}^{\text{キ}}$②，${}^{\text{ク}}$③)

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=2\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}+2\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}=2\cdot\dfrac{\mathrm{BF}+\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}$

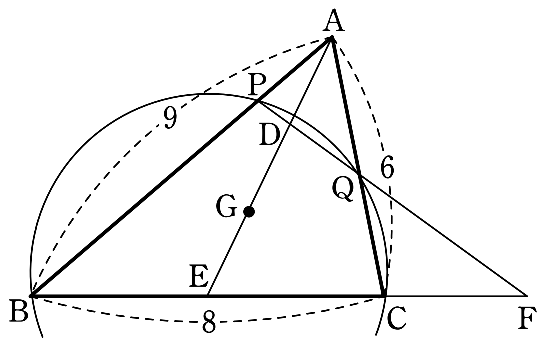
ここで　$\dfrac{\mathrm{BF}+\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}=\dfrac{(2\mathrm{EC}+\mathrm{CF})+\mathrm{CF}}{\mathrm{EC}+\mathrm{CF}}=2$　……③

よって　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=2\cdot2=^{\text{ケ}}4$

注意　上の解答は点 F が C の右側にある場合を考えているが，B の左側にある場合も同様に示すことができる。

(2)　方べきの定理により

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AC}$$



ゆえに　$9\mathrm{AP}=6\mathrm{AQ}$

よって　$\mathrm{AQ}=\dfrac{{}^{\text{コ}}3}{{}^{\text{サ}}2}\mathrm{AP}$

点 D は線分 AG の中点であるから，(1) より

$$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=4$$

$\mathrm{BP}=9-\mathrm{AP}$，$\mathrm{CQ}=6-\dfrac{3}{2}\mathrm{AP}$ であるから

$$\dfrac{9-\mathrm{AP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{6-\dfrac{3}{2}\mathrm{AP}}{\dfrac{3}{2}\mathrm{AP}}=4 \qquad \text{すなわち} \qquad \dfrac{9}{\mathrm{AP}}-1+\dfrac{4}{\mathrm{AP}}-1=4$$

これを解くと　$\mathrm{AP}=\dfrac{{}^{\text{シス}}13}{{}^{\text{セ}}6}$

よって　　$AQ=\frac{3}{2}\cdot\frac{13}{6}=\frac{{}^{\text{ソタ}}13}{{}^{\text{チ}}4}$

点 D は線分 AG の中点であるから，(1) より　　$\frac{CQ}{AQ}=2\cdot\frac{CF}{EF}$

$CQ=6-\frac{13}{4}=\frac{11}{4}$，$EF=4+CF$ であるから　　$\frac{\frac{11}{4}}{\frac{13}{4}}=2\cdot\frac{CF}{4+CF}$

よって　　$11(4+CF)=26CF$　　　　これを解くと　　$CF=\frac{{}^{\text{ツテ}}44}{{}^{\text{トナ}}15}$

(3)　(1) の ①，②，③ は △ABC の形状や点 F の位置に関係なく成り立つから

$$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=\frac{DE}{AD}\cdot\frac{BF}{EF}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CF}{EF}$$

$$=\frac{DE}{AD}\cdot\frac{BF+CF}{EF}=2\cdot\frac{DE}{AD}$$

よって，$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=10$ のとき　　$\frac{DE}{AD}=5$

したがって，$AD:DE=1:5$ であり，$AG:GE=2:1=4:2$ であるから

$$AD:DG:GE=1:3:2$$

ゆえに　　$\frac{AD}{DG}=\frac{{}^{\text{ニ}}1}{{}^{\text{ヌ}}3}$