数学Ⅰ･A　第 4 問

(1)　$625=16\cdot 39+1$ すなわち $5^4=2^4\cdot 39+1$ であるから　　$5^4\cdot 1-2^4\cdot 39=1$　…… ①′

① − ①′ から　　$5^4(x-1)-2^4(y-39)=0$

すなわち　　$5^4(x-1)=2^4(y-39)$

5^4 と 2^4 は互いに素であるから，① の整数解は

$$x=2^4k+1,\quad y=5^4k+39\quad (k \text{ は整数})$$

よって，① の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは，$k=0$ のときで

$$x={}^{\text{ア}}1,\quad y={}^{\text{イウ}}39$$

また，① の整数解のうち，x が 2 桁の正の整数で最小になるのは，$k=1$ のときで

$$x=2^4\cdot 1+1={}^{\text{エオ}}17,\quad y=5^4\cdot 1+39={}^{\text{カキク}}664$$

(2)　$625^2=(5^4)^2=5^{{}^{\text{ケ}}8}$

よって，625^2 を 5^5 で割ったときの余りは　0

また，$m=39$ とすると，(1) より

$$625^2=(5^4)^2=(2^4m+1)^2$$

$$=2^8m^2+2^{{}^{\text{コ}}5}m+1=2^5(2^3m^2+m)+1$$

m は整数であるから，625^2 を 2^5 で割ったときの余りは　1

(3)　5^5x-625^2 が $5^5\cdot 2^5$ の倍数であるから，l を整数として

$$5^5x-625^2=5^5\cdot 2^5l$$

$$5^5x=5^5\cdot 2^5l+625^2=5^5\cdot 2^5l+5^8$$

よって　　$x=2^5l+5^3=32l+125$

x が 3 桁の正の整数で最小になるのは，$l=0$ のときで　　$x={}^{\text{サシス}}125$

このとき　$2^5y=5^5\cdot 125-1=5^8-1$

$$=2^8m^2+2^5m$$

よって　　$y=2^3m^2+m=m(8m+1)$

$$=39(8\cdot 39+1)={}^{\text{セソタチツ}}12207$$

(4)　$(11^4)^2$ について　　$(11^4)^2=11^8$

また，11^4 を 2^4 で割ったときの余りが 1 に等しいから，n を整数として

$$11^4=2^4n+1$$

よって　　$(11^4)^2=(2^4n+1)^2=2^8n^2+2^5n+1$

したがって，x，y を不定方程式 $11^5x-2^5y=1$ の解とすると，$11^5x-(11^4)^2$ は 11^5 でも 2^5 でも割り切れる。

11^5 と 2^5 は互いに素であるから，(3) と同様に考えて $11^5x-(11^4)^2$ は $11^5\cdot 2^5$ の倍数である。

よって，j を整数として　　$11^5x-(11^4)^2=11^5\cdot 2^5j$

$$11^5x=11^5\cdot 2^5j+11^8$$

したがって　　$x=2^5j+11^3=32j+1331$

1331 を 32 で割った商は 41，余りは 19 であるから，x が正の整数で最小になるのは

$j=-41$ のときで　　$x=32\cdot(-41)+1331={}^{テト}19$

このとき　$2^5y=11^5\cdot19-1$

よって　　$y=\dfrac{11^5\cdot19-1}{2^5}={}^{ナニヌネノ}95624$