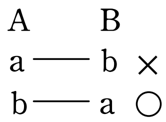
数学Ⅰ・A 第 3 問

(1) (i) A，B の持参したプレゼントをそれぞれ a，b とする。

プレゼントの受け取り方の総数は　2! 通り

A，B の 2 人を順に並べ，それぞれが受け取るプレゼントの組み合わせを樹形図で表すと，右の図のようになる。



よって，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方の総数は

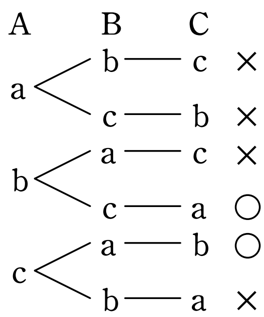
[ア]1 通り

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は　$\dfrac{1}{2!}=\dfrac{{}^{\text{イ}}1}{{}^{\text{ウ}}2}$

(ii) A，B，C の持参したプレゼントをそれぞれ a，b，c とする。

プレゼントの受け取り方の総数は　3! 通り

A，B，C の 3 人を順に並べ，それぞれが受け取るプレゼントの組み合わせを樹形図で表すと，右の図のようになる。



よって，3 人全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る，すなわち 1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方の総数は

[エ]2 通り

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は　$\dfrac{2}{3!}=\dfrac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}3}$

(iii) 3 人で交換会を開く場合，1 回の交換で交換会が終了しない確率は，(ii) より

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

よって，4 回の交換でも交換会が終了しない確率は　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

「4 回以下の交換で交換会が終了する」という事象は「4 回の交換でも交換会が終了しない」という事象の余事象であるから，求める確率は　$1-\dfrac{16}{81}=\dfrac{{}^{\text{キク}}65}{{}^{\text{ケコ}}81}$

(2) A，B，C，D の 4 人で交換会を開く場合，プレゼントの受け取り方の総数は

4! 通り

[1] ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　${}_4C_1$ 通り

残りの 3 人のプレゼントの受け取り方の総数は，(1) の (ii) より　2 通り

よって　${}_4C_1\times 2={}^{\text{サ}}8$ (通り)

[2] ちょうど 2 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　${}_4C_2$ 通り

残りの 2 人のプレゼントの受け取り方の総数は，(1) の (i) より　1 通り

よって　${}_4C_2\times 1={}^{\text{シ}}6$ (通り)

[3]　ちょうど3人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

3人が自分の持参したプレゼントを受け取ると，残りの1人も自動的に自分の持参したプレゼントを受け取ることになる。

よって　　0通り

[4]　4人全員が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

プレゼントの受け取り方の総数は　　1通り

[1]～[4]から，1回目の交換で交換会が終了しないプレゼントの受け取り方の総数は

$$8+6+0+1={}^{スセ}15 \text{ (通り)}$$

このとき，4人全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る，すなわち1回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方の総数は

$$4!-15=9 \text{ (通り)}$$

よって，1回目の交換で交換会が終了する確率は　　$\dfrac{9}{4!}=\dfrac{{}^{ソ}3}{{}^{タ}8}$

(3)　A，B，C，D，Eの5人で交換会を開く場合，プレゼントの受け取り方の総数は

$$5! \text{ 通り}$$

[1]　ちょうど1人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　　${}_5C_1$ 通り

残りの4人のプレゼントの受け取り方の総数は，(2)より　　9通り

よって　　${}_5C_1\times9=45$ (通り)

[2]　ちょうど2人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　　${}_5C_2$ 通り

残りの3人のプレゼントの受け取り方の総数は，(1)の(ii)より　　2通り

よって　　${}_5C_2\times2=20$ (通り)

[3]　ちょうど3人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　　${}_5C_3$ 通り

残りの2人のプレゼントの受け取り方の総数は，(1)の(i)より　　1通り

よって　　${}_5C_3\times1=10$ (通り)

[4]　ちょうど4人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

(2)の[3]と同様に考えると　　0通り

[5]　5人全員が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

プレゼントの受け取り方の総数は　　1通り

[1]～[5]から，1回目の交換で交換会が終了しないプレゼントの受け取り方の総数は

$$45+20+10+0+1=76 \text{ (通り)}$$

このとき，5人全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る，すなわち1回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方の総数は

$$5!-76=44 \text{ (通り)}$$

よって，1回目の交換で交換会が終了する確率は　　$\dfrac{44}{5!}=\dfrac{{}^{チツ}11}{{}^{テト}30}$

(4)　5人で交換会を開いたとき，1回目の交換でA，B，C，Dがそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る事象を X，1回目で交換会が終了する事象を Y とす

ると，求める条件付き確率は　　$P_X(Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(X)}$

$X\cap Y=Y$ であるから，(3) より　　$P(X\cap Y)=P(Y)=\dfrac{11}{30}$

また，1 回目の交換で A，B，C，D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，E が自分の持参したプレゼントを受け取る事象を V，E が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る事象を W とする。

このとき　　$X=V\cup W$

事象 V は，E 以外の 4 人が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る事象であるから，(2) より　　$P(V)=\dfrac{9}{5!}=\dfrac{3}{40}$

事象 W は，5 人全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る事象であるから，(3) より　　$P(W)=\dfrac{11}{30}$

事象 V，W は互いに排反であるから　　$P(X)=P(V)+P(W)=\dfrac{3}{40}+\dfrac{11}{30}=\dfrac{53}{120}$

したがって，求める条件付き確率は　　$P_X(Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\dfrac{11}{30}\div\dfrac{53}{120}=\dfrac{^{ナニ}44}{_{ヌネ}53}$