数学Ⅰ･A　第 2 問〔1〕

(1)　$p=4$，$q=-4$ のとき

①は $x^2+4x-4=0$ となり，その解は　$x=-2\pm 2\sqrt{2}$

②は $x^2-4x+4=0$ となり，その解は　$x=2$

よって　$n={}^{ア}3$

また，$p=1$，$q=-2$ のとき

①は $x^2+x-2=0$ となり，その解は　$x=1,\ -2$

②は $x^2-2x+1=0$ となり，その解は　$x=1$

よって　$n={}^{イ}2$

(2)　$n=3$ となるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　①と②はそれぞれ異なる 2 つの実数解をもち，そのうちの 1 つだけが一致する。

[2]　①，②のうち，一方は異なる 2 つの実数解，他方は重解をもち，それらの 3 つの解が異なる。

[1] の場合

花子さんと太郎さんの会話のように，①，②をともに満たす実数を α とすると，

$\alpha^2-6\alpha+q=0$ かつ $\alpha^2+q\alpha-6=0$ が成り立つ。

α^2 を消去すると　$6\alpha-q=-q\alpha+6$

整理すると　$(q+6)(\alpha-1)=0$

よって　$q=-6$ または $\alpha=1$

(i)　$q=-6$ のとき，2 つの方程式①，②は一致する。

よって，不適。

(ii)　$\alpha=1$ のとき　$q=-1^2+6\times 1=5$

このとき，①は $x^2-6x+5=0$ となり，その解は　$x=1,\ 5$

②は $x^2+5x-6=0$ となり，その解は　$x=1,\ -6$

よって，$n=3$ となるから，適する。

[2] の場合

①，②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$\frac{D_1}{4}=(-3)^2-1\cdot q=9-q,\qquad D_2=q^2-4\cdot 1\cdot(-6)=q^2+24$$

$D_2>0$ であるから，②は異なる 2 つの実数解をもつ。

よって，①が重解をもつから　$D_1=0$

ゆえに　$q=9$

このとき，①の重解は　$x=3$

また，②は $x^2+9x-6=0$ となり，$x=3$ は②の解ではない。

したがって，$n=3$ となり，適する。

以上から　$q={}^{ウ}5,\ {}^{エ}9$

(3)　③を変形すると　$y=(x-3)^2+q-9$

③のグラフの頂点の座標は　$(3,\ q-9)$

④ を変形すると　$y=\left(x+\frac{q}{2}\right)^2-\frac{q^2}{4}-6$

④ のグラフの頂点の座標は　$\left(-\frac{q}{2},\ -\frac{q^2}{4}-6\right)$

よって，q の値を 1 から増加させたとき

③ のグラフの頂点の x 座標の値は変化せず，y 座標の値は増加する。

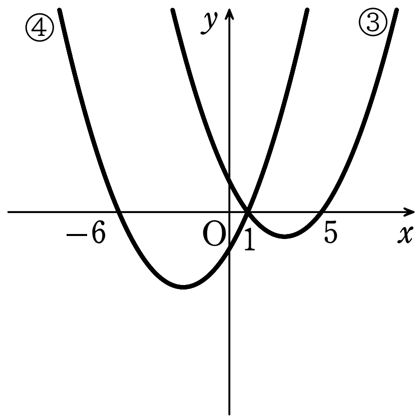
したがって，③ のグラフは上に動く。(オ ⑥)

④ のグラフの頂点の x 座標，y 座標の値はいずれも減少する。

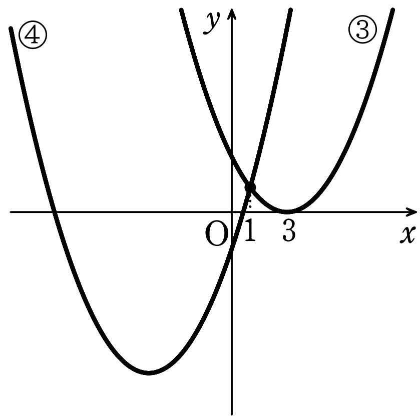
したがって，④ のグラフは左下に動く。(カ ①)

(4)　$q=5$，$q=9$ のときの ③，④ のグラフは，それぞれ次の図のようになる。

$q=5$



$q=9$



(3) で調べたように，$5<q<9$ の範囲においても，q の値を増加させたとき，③ のグラフは上に，④ のグラフは左下に動く。

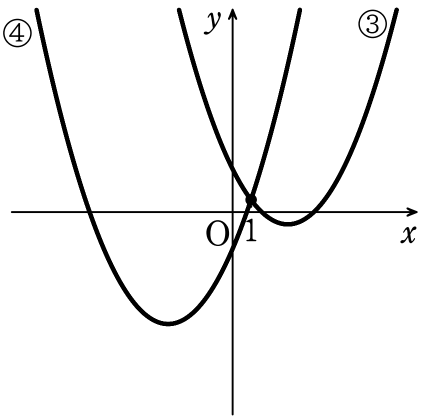
また，③ と ④ のグラフの交点の x 座標は

$$x^2-6x+q=x^2+qx-6$$

すなわち　$-(q+6)x=-(q+6)$

$q+6\neq 0$ であるから　$x=1$

よって，$5<q<9$ のときの ③ と ④ のグラフは右の図のようになる。



よって，A は ③ のグラフが x 軸の下側にある x の値の範囲，B は ④ のグラフが x 軸の下側にある x の値の範囲であり，A，B に共通部分はない。

また，$\overline{A}$ は ③ のグラフが x 軸の上側にあるか，x 軸と共有点をもつ x の値の範囲である。

よって，$x\in A$ は，$x\in B$ であるための必要条件でも十分条件でもない。(キ ③)

また，命題「$x\in B$ ならば $x\in\overline{A}$」は真である。

一方，命題「$x\in\overline{A}$ ならば $x\in B$」については，偽である。(反例：$x=1$)

したがって，$x\in B$ は，$x\in\overline{A}$ であるための十分条件であるが必要条件ではない。

(ク ①)