数学Ⅱ・B 第 1 問〔1〕

(1) $\sin\dfrac{\pi}{{}^{ア}3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから，三角関数の合成により

$$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)={}^{イ}2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

と変形できる。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ であるから，y は $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{{}^{ウ}6}$

で最大値 ${}^{エ}2$ をとる。

(2) (i) $p=0$ のとき　$y=\sin\theta$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから，y は $\theta=\dfrac{\pi}{{}^{オ}2}$ で最大値 ${}^{カ}1$ をとる。

(ii) $p>0$ のとき

加法定理 $\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$ を用いると

$$y=\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{1+p^2}(\sin\alpha\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta)$$

$$=\sqrt{1+p^2}(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\cos\alpha)$$

$$=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)\quad({}^{キ}⑨)$$

と表すことができる。ただし，α は

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\ ({}^{ク}①),\ \cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ ({}^{ケ}③),\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\alpha\leqq\theta-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ であるから，$\cos(\theta-\alpha)$ は $\theta-\alpha=0$ すなわち $\theta=\alpha$ で最大となる。$\sqrt{1+p^2}>0$ であるから，このとき y も最大となる。

よって，y は $\theta=\alpha$ (${}^{コ}①$) で最大値 $\sqrt{1+p^2}$ (${}^{サ}⑨$) をとる。

(iii) $p<0$ のとき

加法定理 $\cos(\theta+\beta)=\cos\theta\cos\beta-\sin\theta\sin\beta$ を用いると

$$y=\sin\theta-(-p)\cos\theta=-(-p\cos\theta-\sin\theta)$$

$$=-\sqrt{1+p^2}\left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta\right)$$

$$=-\sqrt{1+p^2}(\cos\beta\cos\theta-\sin\beta\sin\theta)$$

$$=-\sqrt{1+p^2}(\cos\theta\cos\beta-\sin\theta\sin\beta)$$

$$=-\sqrt{1+p^2}\cos(\theta+\beta)$$

と表すことができる。ただし，β は

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\ \cos\beta=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\beta\leqq\theta+\beta\leqq\frac{\pi}{2}+\beta$ であるから，$\cos(\theta+\beta)$ は $\theta+\beta=\frac{\pi}{2}+\beta$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ で最小となる。$-\sqrt{1+p^2}<0$ であるから，このとき y は最大となる。

よって，y は $\theta=\frac{\pi}{2}$ (シ ②) で最大値 1 (ス ①) をとる。

別解　(iii)　$p<0$ のとき

加法定理 $\sin(\theta-\beta)=\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta$ を用いると

$$\begin{aligned}y&=\sin\theta-(-p)\cos\theta\\&=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta-\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{1+p^2}(\cos\beta\sin\theta-\sin\beta\cos\theta)\\&=\sqrt{1+p^2}(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)\\&=\sqrt{1+p^2}\sin(\theta-\beta)\end{aligned}$$

と表すことができる。ただし，β は

$$\sin\beta=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$-\beta\leqq\theta-\beta\leqq\frac{\pi}{2}-\beta$ であるから，$\sin(\theta-\beta)$ は $\theta-\beta=\frac{\pi}{2}-\beta$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大となる。$\sqrt{1+p^2}>0$ であるから，このとき y も最大となる。

よって，y は $\theta=\frac{\pi}{2}$ (シ ②) で最大値 1 (ス ①) をとる。

数学Ⅱ・B　第 1 問〔2〕

(1)　$f(0)=\frac{1+1}{2}=$ セ1，$g(0)=\frac{1-1}{2}=$ ソ0

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=1$$

等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

よって，$f(x)$ は $x=$ タ0 で最小値 チ1 をとる。

$g(x)=-2$ とすると　　$\frac{2^x-2^{-x}}{2}=-2$

分母を払うと　　$2^x-2^{-x}=-4$

両辺に 2^x を掛けて整理すると　　$(2^x)^2+4\cdot 2^x-1=0$

$2^x>0$ であるから　　$2^x=-2+\sqrt{5}$　すなわち　$2^x=\sqrt{5}-2$

よって，$g(x)=-2$ となる x の値は $\log_2(\sqrt{{}^{ツ}5}-{}^{テ}2)$ である。

(2)　$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}=f(x)$　(ト ⓪)　　…… ①

$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-g(x)$　(ナ ③)　　…… ②

$$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{4^x+2+4^{-x}}{4}-\frac{4^x-2+4^{-x}}{4}={}^{ニ}1 \quad \cdots\cdots ③$$

$$g(2x)=\frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}=2\cdot\frac{2^x+2^{-x}}{2}\cdot\frac{2^x-2^{-x}}{2}={}^{ヌ}2f(x)g(x) \quad \cdots\cdots ④$$

別解　③　$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}$

$=2^x\cdot 2^{-x}={}^{ニ}1$

(3)　(1) より $f(0)=1$，$g(0)=0$ であるから，太郎さんが考えた式 (A) ～ (D) に $\beta=0$ を代入すると，それぞれ次のようになる。

(A)　$f(\alpha)=g(\alpha)$　　(B)　$f(\alpha)=f(\alpha)$　　(C)　$g(\alpha)=f(\alpha)$

(D)　$g(\alpha)=-g(\alpha)$ より　$g(\alpha)=0$

(2) の ③ から　　$\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=1$

したがって，$f(x)-g(x)\neq 0$ すなわち $f(x)\neq g(x)$ であるから，(A)，(C) はつねには成り立たないことがわかる。

また，$g(1)=\dfrac{2-2^{-1}}{2}\neq 0$ であるから，$\alpha=1$，$\beta=0$ のとき (D) は成り立たない。

よって，式 (A) ～ (D) のうち，(B) 以外の 3 つは成り立たないことがわかる。(ネ ①)

参考　(B) の左辺と右辺をそれぞれ計算すると，次のようになる。

$$f(\alpha+\beta)=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$$

$$f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=\frac{2^\alpha+2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^\beta+2^{-\beta}}{2}+\frac{2^\alpha-2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^\beta-2^{-\beta}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(2^{\alpha+\beta}+2^{\alpha-\beta}+2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta})$$

$$+\frac{1}{4}(2^{\alpha+\beta}-2^{\alpha-\beta}-2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta})$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$$

したがって，(B) はつねに成り立つ。

数学Ⅱ・B　第 2 問

(1)　①，② の 2 次関数のグラフには次の共通点がある。

y 軸との交点の y 座標は ${}^{ア}3$ である。

① について $y'=6x+2$，② について $y'=4x+2$ であるから，$x=0$ でともに $y'=2$ となる。

よって，y 軸との交点における接線の方程式は $y={}^{イ}2x+{}^{ウ}3$ である。

y 軸との交点における接線の方程式が $y=2x+3$ となる 2 次関数は，a を 0 でない定数として $y=ax^2+2x+3$ と表されるから，⓪ ～ ⑤ の 2 次関数のうちであてはまるものは $y=-x^2+2x+3$（^{エ}④）である。

a，b，c を 0 でない実数とする。

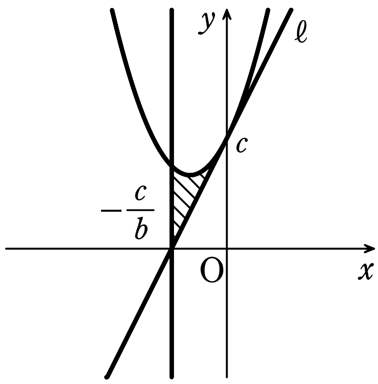
曲線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点 $(0,\ {}^{オ}c)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は

$y={}^{カ}bx+{}^{キ}c$ である。

$bx+c=0$ を解くと　　$x=-\dfrac{c}{b}$

よって，接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{{}^{クケ}-c}{{}^{コ}b}$ である。

a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 ℓ および直線 $x=-\dfrac{c}{b}$ で囲まれた図形の面積を S とすると



$$S=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}ax^2dx=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{-\frac{c}{b}}^{0}$$

$$=\frac{ac^{{}^{サ}3}}{{}^{シ}3b^{{}^{ス}3}}\quad\cdots\cdots③$$

③ において，$a=1$ とし，S の値が一定となるように正の実数 b，c の値を変化させる。

このとき，$S=\dfrac{c^3}{3b^3}$ から

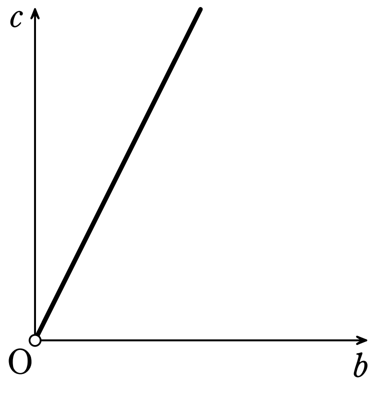
$$c^3=3Sb^3$$

ゆえに　　$c=\sqrt[3]{3S}\,b$

S の値が一定であるから，$\sqrt[3]{3S}$ は正の定数である。

よって，b と c の関係を表すグラフの概形は

右の図のようになる。（^{セ}⓪）



(2)　(1) と同様に考えると，④，⑤，⑥ の 3 次関数には次の共通点があることがわかる。

y 軸との交点の y 座標は ${}^{ソ}5$ である。

y 軸との交点における接線の方程式は $y=$ タ$3x+$ チ5 である。

a，b，c，d を 0 でない実数とする。

曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $(0,$ ツ$d)$ における接線の方程式は $y=$ テ$cx+$ トd である。

次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=cx+d$ とし，$f(x)-g(x)$ について考える。

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと　　$h(x)=ax^3+bx^2=ax^2\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$

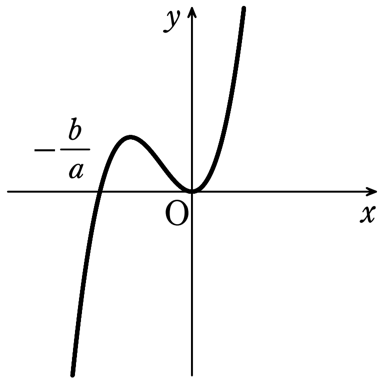
$h(x)=0$ を解くと　　$x=0$ (重解)，$-\dfrac{b}{a}$

a，b が正の実数であるとき，$y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，$-\dfrac{b}{a}$ と 0 であり

$$-\frac{b}{a}<0$$

$h(x)=0$ は $x=0$ を重解にもつから，$y=h(x)$ のグラフは x 軸と原点で接する。

よって，$y=h(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。(ナ ②)

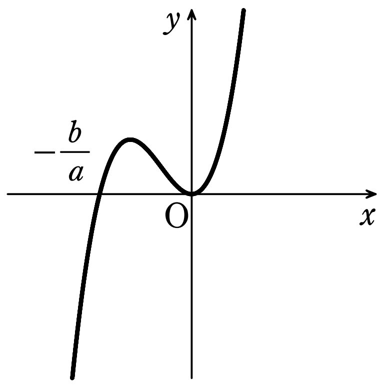


$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $h(x)=0$ の解であるから，$\dfrac{\text{ニヌ}-b}{\text{ネ}a}$ と ノ0 である。

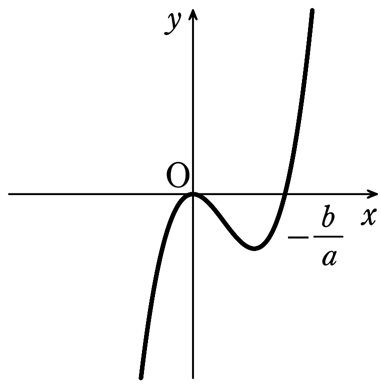
また，x が $-\dfrac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|$ すなわち $|h(x)|$ の値が最大となる x の値を求める。

a，b の正負によって，$y=h(x)$ のグラフの概形は，次の 4 つの場合に分けられる。

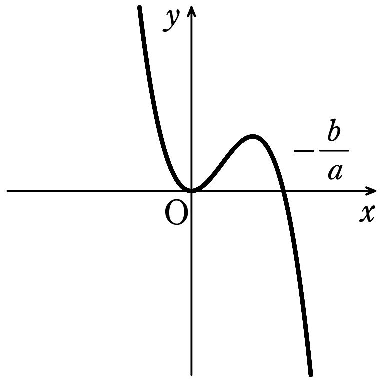
[1]　$a>0$，$b>0$ のとき

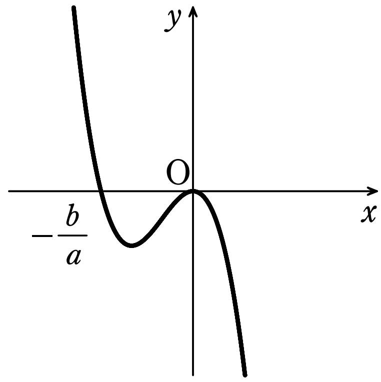


[2]　$a>0$，$b<0$ のとき



[3]　$a<0$，$b>0$ のとき　　　　[4]　$a<0$，$b<0$ のとき





いずれの場合も $h(x)$ は $-\dfrac{b}{a}$ と 0 の間で極大値または極小値をとり，このとき $|h(x)|$ は最大となる。

ここで　　$h'(x)=3ax^2+2bx=3ax\left(x+\dfrac{2b}{3a}\right)$

$h'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ -\dfrac{2b}{3a}$

よって，x が $-\dfrac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき，$|h(x)|$ すなわち $|f(x)-g(x)|$ の値が最大となるのは，$x=\dfrac{{}^{\text{ハヒフ}}-2b}{{}^{\text{ヘホ}}3a}$ のときである。

注意　問題文の後半で $|f(x)-g(x)|$ という表現があるため，a，b，c，d が正の実数であるという条件は，(ナ) のみに限定されているものとして解答した。
ただし，本問では (ニ) 以降も a，b，c，d が正の実数であるとして解答しても正解が得られる。

数学Ⅱ・B　第 3 問

(1)　Q 高校の生徒全員を母集団とし，全く読書をしなかった生徒の母比率が 0.5，無作為標本の大きさが 100 であるから，確率変数 X は二項分布 $B(100,\ 0.5)$ に従う。(ア ③)
よって，X の平均 (期待値) と標準偏差は

$$E(X)=100\times0.5={}^{\text{イウ}}50,\ \sigma(X)=\sqrt{100\times0.5\times0.5}=\sqrt{25}={}^{\text{エ}}5$$

(2)　標本の大きさ 100 は十分に大きいから，全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.5 とするとき，X は近似的に正規分布 $N(50,\ 5^2)$ に従う。

このとき，$Z=\dfrac{X-50}{5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=36$ のとき，$Z=-\dfrac{14}{5}=-2.8$ であるから

$$p_5=P(X\leqq36)=P(Z\leqq-2.8)=P(Z\geqq2.8)$$
$$=0.5-p(2.8)=0.5-0.4974=0.0026\fallingdotseq0.003\quad(\text{オ ①})$$

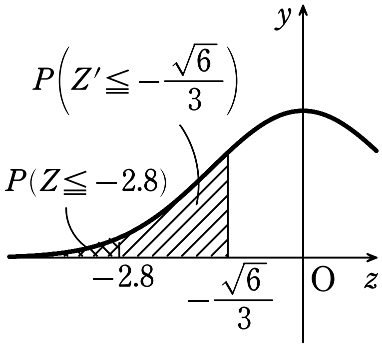
また，全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.4 とするとき，100 人の無作為標本のうちで全く読書をしなかった生徒の数を表す確率変数を X' とする。

X' の平均 (期待値) と標準偏差は

$$E(X')=100\times0.4=40,\ \sigma(X)=\sqrt{100\times0.4\times0.6}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

よって，X' は近似的に正規分布 $N(40,\ (2\sqrt{6})^2)$ に従う。

このとき，$Z'=\dfrac{X'-40}{2\sqrt{6}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。



$X'=36$ のとき，$Z'=-\dfrac{4}{2\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}>-2.8$

であるから

$$P\left(Z'\leqq-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)>P(Z\leqq-2.8)$$

よって　　$P(X'\leqq36)>P(X\leqq36)$

すなわち　　$p_4>p_5$　(カ ②)

(3)　$C_1=204-1.96\cdot\dfrac{150}{\sqrt{100}}$，$C_2=204+1.96\cdot\dfrac{150}{\sqrt{100}}$ であるから

$$C_1+C_2=2\cdot204={}^{\text{キクケ}}408,\ C_2-C_1=2\cdot1.96\cdot\frac{150}{\sqrt{100}}={}^{\text{コサ}}58.{}^{\text{シ}}8$$

また，$C_1\leqq m\leqq C_2$ が母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間であるとは，区間 $C_1\leqq x\leqq C_2$ が m の値を含むことが，約 95%の確からしさで期待できることを意味する。

よって，$C_1\leqq m$ も $m\leqq C_2$ も成り立つとは限らない。(ス ③)

(4)　図書委員会が無作為に抽出した 100 人は校長先生が無作為に抽出した 100 人と同じであるとは限らないから，そのうち全く読書をしなかった生徒の数も同じであるとは限らない。

よって，n と 36 との大小はわからない。(セ ③)

(5)　図書委員会の調査結果における 1 週間の読書時間の標本平均を α とすると

$$D_1=\alpha-1.96\cdot\frac{150}{\sqrt{100}},\ D_2=\alpha+1.96\cdot\frac{150}{\sqrt{100}}$$

⓪　$\alpha=204$ とは限らないから，$C_1=D_1$ と $C_2=D_2$ が必ず成り立つとは限らない。
よって，正しくない。

①　$\alpha=204$ のとき，$C_1=D_1$ かつ $C_2=D_2$ であるから　　$C_1<D_2$ かつ $D_1<C_2$
よって，$C_1<D_2$ または $D_1<C_2$ のどちらか一方のみが必ず成り立つとは限らない。
したがって，正しくない。

②　α が 204 より十分に大きい，または小さいとき，$D_2<C_1$ または $C_2<D_1$ となる場合もある。
よって，正しい。

③，④，⑤　α の値に関わらず，$D_2-D_1=2\cdot 1.96\cdot\dfrac{150}{\sqrt{100}}=C_2-C_1$ が成り立つ。

よって，④が正しく，③，⑤は正しくない。

したがって，正しいものは　ソ ②，タ ④　（または ソ ④，タ ②）

参考　α は図書委員会の調査結果における 1 週間の読書時間 (分) の標本平均であるから，

α のとりうる値の範囲は

$0\leqq\alpha\leqq 60\cdot 24\cdot 7$　　すなわち　$0\leqq\alpha\leqq 10080$

ここで，$D_2<C_1$ が成り立つとすると　$\alpha+1.96\cdot\dfrac{150}{\sqrt{100}}<204-1.96\cdot\dfrac{150}{\sqrt{100}}$

すなわち　$\alpha<204-2\cdot 1.96\cdot\dfrac{150}{\sqrt{100}}=204-58.8=145.2$

逆に，$0\leqq\alpha<145.2$ のとき，$D_2<C_1$ となる。

同様に，$C_2<D_1$ が成り立つとすると　$204+1.96\cdot\dfrac{150}{\sqrt{100}}<\alpha-1.96\cdot\dfrac{150}{\sqrt{100}}$

すなわち　$\alpha>204+2\cdot 1.96\cdot\dfrac{150}{\sqrt{100}}=204+58.8=262.8$

逆に，$262.8<\alpha\leqq 10080$ のとき，$C_2<D_1$ となる。

よって，$D_2<C_1$ または $C_2<D_1$ となる場合もある。

したがって，② が正しいことがわかる。

数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　$\{a_n\}$ は初項 3，公差 p の等差数列，$\{b_n\}$ は初項 3，公比 r の等比数列であるから

$a_n={}^{ア}3+(n-1)p$　…… ②，　$a_{n+1}=3+np$　…… ③，　$b_n={}^{イ}3r^{n-1}$

$r\fallingdotseq 0$ により，すべての自然数 n について，$b_n\fallingdotseq 0$ となる。

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=r$ であるから，① の両辺を b_n で割ると　$ra_n-2a_{n+1}+3r=0$

すなわち　${}^{ウ}2a_{n+1}=r(a_n+{}^{エ}3)$　…… ④

④ に ② と ③ を代入すると　$2(3+np)=r\{3+(n-1)p+3\}$

変形すると　$6+2pn=r(-p+6)+rpn$

よって　$(r-{}^{オ}2)pn=r(p-{}^{カ}6)+{}^{キ}6$　…… ⑤

⑤ がすべての n で成り立つことおよび $p\fallingdotseq 0$ により　$r=2$

これを ⑤ に代入して　$0=2(p-6)+6$　　よって　$p={}^{ク}3$

以上から，すべての自然数 n について，a_n と b_n が正であることもわかる。

(2)　$p=3$，$r=2$ であることから

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}n\{2\cdot 3+(n-1)\cdot 3\}=\frac{{}^{ケ}3}{{}^{コ}2}n(n+{}^{サ}1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{3(2^n - 1)}{2-1} = {}^{シ}3(2^n - {}^{ス}1)$$

(3)　⑥ を変形すると　　$(a_n+3)c_{n+1} = 4a_{n+1}c_n$

a_n が正であるから　　$a_n + 3 \neq 0$

よって　　$c_{n+1} = \dfrac{{}^{セ}4a_{n+1}}{a_n + {}^{ソ}3} c_n$

また，$p=3$ より $a_{n+1} = a_n + 3$ であるから　　$\dfrac{4a_{n+1}}{a_n+3} = \dfrac{4(a_n+3)}{a_n+3} = 4$

よって，$c_{n+1} = 4c_n$ より，数列 $\{c_n\}$ は公比が 1 より大きい等比数列である。(^{タ} ②)

(4)　$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ であるから，⑦ の両辺を b_n で割ると　　$2d_n - qd_{n+1} + 2u = 0$

変形すると　　$qd_{n+1} = 2(d_n + u)$

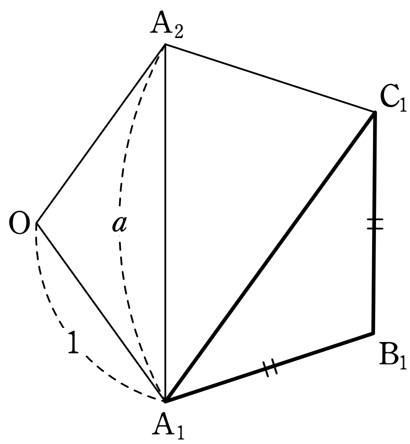
よって　　$d_{n+1} = \dfrac{{}^{チ}2}{q}(d_n + u)$

数列 $\{d_n\}$ が，公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は

$$0 < \frac{2}{q} < 1 \text{ かつ } u = 0$$

すなわち　　$q > {}^{ツ}2$ かつ $u = {}^{テ}0$

数学Ⅱ・B　第 5 問



(1)　正五角形の内角の和は $180° \times (5-2) = 540°$ である

から　　$\angle A_1B_1C_1 = 540° \div 5 = 108°$

$\triangle B_1C_1A_1$ は $B_1C_1 = B_1A_1$ の二等辺三角形である

から　　$\angle A_1C_1B_1 = \angle C_1A_1B_1$

よって　$\angle A_1C_1B_1 = (180° - \angle A_1B_1C_1) \div 2$

$= (180° - 108°) \div 2 = {}^{アイ}36°$

また　　$\angle C_1A_1A_2 = 108° - (\angle OA_1A_2 + \angle C_1A_1B_1)$

$= 108° - 36° \times 2 = 36°$

$\angle A_1C_1B_1 = \angle C_1A_1A_2$ より，錯角が等しいから，

$\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{B_1C_1}$ は平行である。

ゆえに，$\overrightarrow{A_1A_2} = {}^{ウ}a\overrightarrow{B_1C_1}$ であるから

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{a}\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{a}\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right)$$

また，$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ は平行で，さらに，$\overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{A_1C_1}$ も平行であることから

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$$
$$= -a\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + a\overrightarrow{OA_2}$$

$$=({}^{\text{エ}}a-{}^{\text{オ}}1)\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}-\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\right)$$

したがって　$\dfrac{1}{a}=a-1$　　ゆえに　$a^2-a-1=0$

$a>0$ であるから　$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2) 面 $\mathrm{OA_1B_1C_1A_2}$ に着目する。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}$ が平行であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+a\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$$

また　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}-\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right|^2=a^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{{}^{\text{カ}}3+\sqrt{{}^{\text{キ}}5}}{{}^{\text{ク}}2}$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}-\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\right|^2$$

$$=1^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+1^2=2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$$

よって　$2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\dfrac{{}^{\text{ケ}}1-\sqrt{{}^{\text{コ}}5}}{{}^{\text{サ}}4}$

次に，面 $\mathrm{OA_2B_2C_2A_3}$ に着目すると　$\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+a\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ が成り立つことがわかる。

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+a\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+a\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\quad({}^{\text{シ}}\ 9)$$

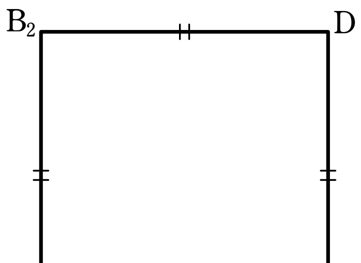
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}+a\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+a\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\right)$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+a\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\right|^2+a\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times1^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$=0\quad({}^{\text{ス}}\ 0)$$

最後に，面 $\mathrm{A_2C_1DEB_2}$ に着目する。



$\overrightarrow{\mathrm{B_2D}}=a\overrightarrow{\mathrm{A_2C_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}$ であるから，四角形 $\mathrm{OB_1DB_2}$ は平行四辺形である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}=0$ であるから

$$\angle\mathrm{B_1OB_2}=90^\circ$$

さらに，四角形 $\mathrm{OB_1DB_2}$ の辺の長さは，すべて a である。

したがって，四角形 $\mathrm{OB_1DB_2}$ は正方形である。(${}^{\text{セ}}$ 0)

参考　(2) の内積の値を求める問題は，文字 a を用いると計算ミスを防ぎやすい。

(1) から $\dfrac{1}{a}=a-1$ すなわち $a^2=a+1$ が成り立つ。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}-\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\right|^2=a^2=a+1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{{}^{カ}3+\sqrt{{}^{キ}5}}{{}^{ク}2}$$

$2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=a+1$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\frac{1-a}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{{}^{ケ}1-\sqrt{{}^{コ}5}}{{}^{サ}4}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=\dfrac{1-a}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+a\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\\&=\frac{1-a}{2}+a\times\frac{1-a}{2}=-\frac{a^2-1}{2}=-\frac{(a+1)-1}{2}\\&=-\frac{a}{2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\quad({}^{シ}⑨)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}_2}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+a\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\right|^2+a\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}+a^2\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\\&=\frac{1-a}{2}+a\times1^2+a\times\frac{1-a}{2}+a^2\times\frac{1-a}{2}\\&=\frac{1-a}{2}\times(1+a+a^2)+a=\frac{1-a}{2}\times\{1+a+(a+1)\}+a\\&=\frac{1-a}{2}\times(2a+2)+a\\&=-a^2+a+1=-(a+1)+a+1=0\quad({}^{ス}⓪)\end{aligned}$$