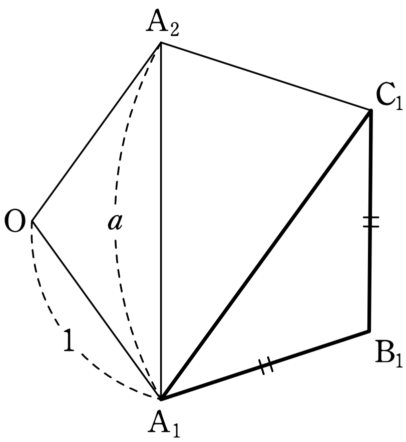
数学Ⅱ・B　第 5 問

(1)　正五角形の内角の和は $180^\circ\times(5-2)=540^\circ$ である

から　　$\angle A_1B_1C_1=540^\circ\div 5=108^\circ$



$\triangle B_1C_1A_1$ は $B_1C_1=B_1A_1$ の二等辺三角形である

から　　$\angle A_1C_1B_1=\angle C_1A_1B_1$

よって　$\angle A_1C_1B_1=(180^\circ-\angle A_1B_1C_1)\div 2$

$$=(180^\circ-108^\circ)\div 2={}^{\text{アイ}}36^\circ$$

また　　$\angle C_1A_1A_2=108^\circ-(\angle OA_1A_2+\angle C_1A_1B_1)$

$$=108^\circ-36^\circ\times 2=36^\circ$$

$\angle A_1C_1B_1=\angle C_1A_1A_2$ より，錯角が等しいから，

$\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{B_1C_1}$ は平行である。

ゆえに，$\overrightarrow{A_1A_2}={}^{\text{ウ}}a\overrightarrow{B_1C_1}$ であるから

$$\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{a}\overrightarrow{A_1A_2}=\frac{1}{a}\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right)$$

また，$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ は平行で，さらに，$\overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{A_1C_1}$ も平行であることから

$$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{B_1A_2}+\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}$$

$$=-a\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_1}+a\overrightarrow{OA_2}$$

$$=({}^{\text{エ}}a-{}^{\text{オ}}1)\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right)$$

したがって　　$\dfrac{1}{a}=a-1$　　　　ゆえに　　$a^2-a-1=0$

$a>0$ であるから　　$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2)　面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目する。

$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ が平行であることから

$$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_1}=\overrightarrow{OA_2}+a\overrightarrow{OA_1}$$

また　　$\left|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2=a^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{{}^{\text{カ}}3+\sqrt{{}^{\text{キ}}5}}{{}^{\text{ク}}2}$

$$\left|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA_1}\right|^2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+\left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2$$

$$=1^2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+1^2=2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$

よって　　$2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　　　　ゆえに　　$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\dfrac{{}^{\text{ケ}}1-\sqrt{{}^{\text{コ}}5}}{{}^{\text{サ}}4}$

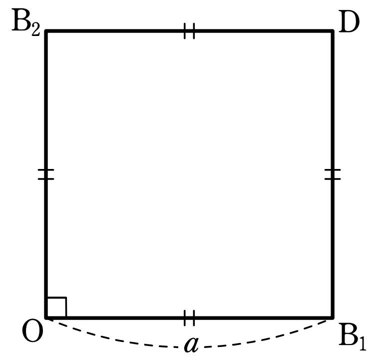
次に，面 $OA_2B_2C_2A_3$ に着目すると　　$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}$

さらに，$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ が成り立つことがわかる。

ゆえに　$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\left(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}\right)=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\quad({}^{\text{シ}}\ ⑨)$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}&=\left(\overrightarrow{OA_2}+a\overrightarrow{OA_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}\right)\\
&=\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a\left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2+a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a^2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}\\
&=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times 1^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}\\
&\qquad\qquad+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{4}\\
&=0 \quad (^{ス}\ ⓪)
\end{aligned}
$$



最後に，面 $A_2C_1DEB_2$ に着目する。

$\overrightarrow{B_2D}=a\overrightarrow{A_2C_1}=\overrightarrow{OB_1}$ であるから，四角形 OB_1DB_2 は平行四辺形である。

また，$\overrightarrow{OB_1}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB_2}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=0$ であるから

$$\angle B_1OB_2=90°$$

さらに，四角形 OB_1DB_2 の辺の長さは，すべて a である。

したがって，四角形 OB_1DB_2 は正方形である。$(^{セ}\ ⓪)$

参考　(2) の内積の値を求める問題は，文字 a を用いると計算ミスを防ぎやすい。

(1) から $\dfrac{1}{a}=a-1$ すなわち $a^2=a+1$ が成り立つ。

$$\left|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right|^2=a^2=a+1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{{}^{カ}3+\sqrt{{}^{キ}5}}{{}^{ク}2}$$

$2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=a+1$ から

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\frac{1-a}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{{}^{ケ}1-\sqrt{{}^{コ}5}}{{}^{サ}4}$$

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{1-a}{2}$ であるから

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}&=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}\\
&=\frac{1-a}{2}+a\times\frac{1-a}{2}=-\frac{a^2-1}{2}=-\frac{(a+1)-1}{2}\\
&=-\frac{a}{2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad (^{シ}\ ⑨)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}&=\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a\left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2+a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a^2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}\\
&=\frac{1-a}{2}+a\times 1^2+a\times\frac{1-a}{2}+a^2\times\frac{1-a}{2}\\
&=\frac{1-a}{2}\times(1+a+a^2)+a=\frac{1-a}{2}\times\{1+a+(a+1)\}+a\\
&=\frac{1-a}{2}\times(2a+2)+a\\
&=-a^2+a+1=-(a+1)+a+1=0 \quad (^{ス}\ ⓪)
\end{aligned}
$$