数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　$\{a_n\}$ は初項 3，公差 p の等差数列，$\{b_n\}$ は初項 3，公比 r の等比数列であるから

$$a_n = {}^{ア}3+(n-1)p \quad \cdots\cdots ②, \qquad a_{n+1}=3+np \quad \cdots\cdots ③, \qquad b_n = {}^{イ}3r^{n-1}$$

$r \fallingdotseq 0$ により，すべての自然数 n について，$b_n \fallingdotseq 0$ となる。

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=r$ であるから，① の両辺を b_n で割ると　　$ra_n-2a_{n+1}+3r=0$

すなわち　　${}^{ウ}2a_{n+1}=r(a_n+{}^{エ}3)$　$\cdots\cdots$ ④

④ に ② と ③ を代入すると　　$2(3+np)=r\{3+(n-1)p+3\}$

変形すると　　$6+2pn=r(-p+6)+rpn$

よって　　$(r-{}^{オ}2)pn=r(p-{}^{カ}6)+{}^{キ}6$　$\cdots\cdots$ ⑤

⑤ がすべての n で成り立つことおよび $p \fallingdotseq 0$ により　　$r=2$

これを ⑤ に代入して　　$0=2(p-6)+6$　　　よって　　$p={}^{ク}3$

以上から，すべての自然数 n について，a_n と b_n が正であることもわかる。

(2)　$p=3$，$r=2$ であることから

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}n\{2\cdot 3+(n-1)\cdot 3\} = \frac{{}^{ケ}3}{{}^{コ}2}n(n+{}^{サ}1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = {}^{シ}3(2^n-{}^{ス}1)$$

(3)　⑥ を変形すると　　$(a_n+3)c_{n+1}=4a_{n+1}c_n$

a_n が正であるから　　$a_n+3 \fallingdotseq 0$

よって　　$c_{n+1}=\dfrac{{}^{セ}4a_{n+1}}{a_n+{}^{ソ}3}c_n$

また，$p=3$ より $a_{n+1}=a_n+3$ であるから　　$\dfrac{4a_{n+1}}{a_n+3}=\dfrac{4(a_n+3)}{a_n+3}=4$

よって，$c_{n+1}=4c_n$ より，数列 $\{c_n\}$ は公比が 1 より大きい等比数列である。$({}^{タ}$ ② $)$

(4)　$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$ であるから，⑦ の両辺を b_n で割ると　　$2d_n-qd_{n+1}+2u=0$

変形すると　　$qd_{n+1}=2(d_n+u)$

よって　　$d_{n+1}=\dfrac{{}^{チ}2}{q}(d_n+u)$

数列 $\{d_n\}$ が，公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は

$$0<\frac{2}{q}<1 \text{ かつ } u=0$$

すなわち　　$q>{}^{ツ}2$ かつ $u={}^{テ}0$