

数学Ⅱ・B 第3問

- (1) Q 高校の生徒全員を母集団とし、全く読書をしなかった生徒の母比率が0.5、無作為標本の大きさが100であるから、確率変数 X は二項分布 $B(100, 0.5)$ に従う。(ア③)
よって、 X の平均(期待値)と標準偏差は

$$E(X) = 100 \times 0.5 = {}^{\text{イウ}} 50, \sigma(X) = \sqrt{100 \times 0.5 \times 0.5} = \sqrt{25} = {}^{\text{エ}} 5$$

- (2) 標本の大きさ100は十分に大きいから、全く読書をしなかった生徒の母比率を0.5とすると、 X は近似的に正規分布 $N(50, 5^2)$ に従う。

このとき、 $Z = \frac{X-50}{5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$X=36$ のとき、 $Z = -\frac{14}{5} = -2.8$ であるから

$$\begin{aligned} p_5 &= P(X \leq 36) = P(Z \leq -2.8) = P(Z \geq 2.8) \\ &= 0.5 - p(2.8) = 0.5 - 0.4974 = 0.0026 \approx 0.003 \quad (\text{オ①}) \end{aligned}$$

また、全く読書をしなかった生徒の母比率を0.4とすると、100人の無作為標本のうちで全く読書をしなかった生徒の数を表す確率変数を X' とする。

X' の平均(期待値)と標準偏差は

$$E(X') = 100 \times 0.4 = 40, \sigma(X) = \sqrt{100 \times 0.4 \times 0.6} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

よって、 X' は近似的に正規分布 $N(40, (2\sqrt{6})^2)$ に従う。

このとき、 $Z' = \frac{X'-40}{2\sqrt{6}}$ は近似的に標準正規分布

$N(0, 1)$ に従う。

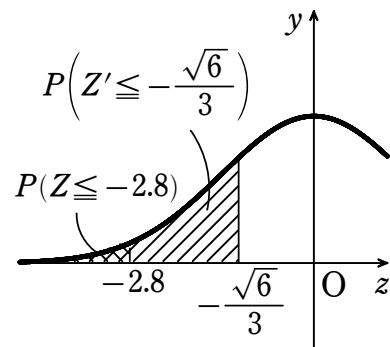
$X'=36$ のとき、 $Z' = -\frac{4}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} > -2.8$

であるから

$$P\left(Z' \leq -\frac{\sqrt{6}}{3}\right) > P(Z \leq -2.8)$$

よって $P(X' \leq 36) > P(X \leq 36)$

すなわち $p_4 > p_5$ (カ②)



- (3) $C_1 = 204 - 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}$, $C_2 = 204 + 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}$ であるから

$$C_1 + C_2 = 2 \cdot 204 = {}^{\text{キクケ}} 408, C_2 - C_1 = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}} = {}^{\text{コサ}} 58.8$$

また、 $C_1 \leq m \leq C_2$ が母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間であるとは、区間 $C_1 \leq x \leq C_2$ が m の値を含むことが、約95%の確からしきで期待できることを意味する。

よって、 $C_1 \leq m$ も $m \leq C_2$ も成り立つとは限らない。(ス③)

- (4) 図書委員会が無作為に抽出した100人は校長先生が無作為に抽出した100人と同じであるとは限らないから、そのうち全く読書をしなかった生徒の数も同じであるとは限らない。

よって、 n と36との大小はわからない。(セ③)

(5) 図書委員会の調査結果における1週間の読書時間の標本平均を α とすると

$$D_1 = \alpha - 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}, \quad D_2 = \alpha + 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}$$

① $\alpha = 204$ とは限らないから、 $C_1 = D_1$ と $C_2 = D_2$ が必ず成り立つとは限らない。
よって、正しくない。

① $\alpha = 204$ のとき、 $C_1 = D_1$ かつ $C_2 = D_2$ であるから $C_1 < D_2$ かつ $D_1 < C_2$
よって、 $C_1 < D_2$ または $D_1 < C_2$ のどちらか一方のみが必ず成り立つとは限らない。
したがって、正しくない。

② α が 204 より十分に大きい、または小さいとき、 $D_2 < C_1$ または $C_2 < D_1$ となる場合もある。
よって、正しい。

③, ④, ⑤ α の値に関わらず、 $D_2 - D_1 = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}} = C_2 - C_1$ が成り立つ。

よって、④が正しく、③, ⑤は正しくない。

したがって、正しいものは ソ②, タ④ (または ソ④, タ②)

【参考】 α は図書委員会の調査結果における1週間の読書時間(分)の標本平均であるから、
 α のとりうる値の範囲は

$$0 \leq \alpha \leq 60 \cdot 24 \cdot 7 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq \alpha \leq 10080$$

ここで、 $D_2 < C_1$ が成り立つとすると $\alpha + 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}} < 204 - 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}$

すなわち $\alpha < 204 - 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}} = 204 - 58.8 = 145.2$

逆に、 $0 \leq \alpha < 145.2$ のとき、 $D_2 < C_1$ となる。

同様に、 $C_2 < D_1$ が成り立つとすると $204 + 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}} < \alpha - 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}$

すなわち $\alpha > 204 + 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}} = 204 + 58.8 = 262.8$

逆に、 $262.8 < \alpha \leq 10080$ のとき、 $C_2 < D_1$ となる。

よって、 $D_2 < C_1$ または $C_2 < D_1$ となる場合もある。

したがって、②が正しいことがわかる。