数学Ⅱ・B　第 2 問

(1)　①，② の 2 次関数のグラフには次の共通点がある。

y 軸との交点の y 座標は ア3 である。

① について $y'=6x+2$，② について $y'=4x+2$ であるから，$x=0$ でともに $y'=2$ となる。

よって，y 軸との交点における接線の方程式は $y=$ イ$2x+$ ウ3 である。

y 軸との交点における接線の方程式が $y=2x+3$ となる 2 次関数は，a を 0 でない定数として $y=ax^2+2x+3$ と表されるから，⓪ ～ ⑤ の 2 次関数のうちであてはまるものは $y=-x^2+2x+3$（エ ④）である。

a，b，c を 0 でない実数とする。

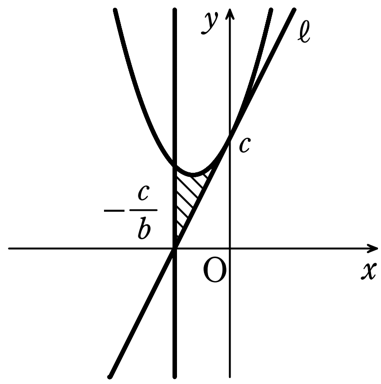
曲線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点 $(0,$ オ$c)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は

$y=$ カ$bx+$ キc である。

$bx+c=0$ を解くと　　$x=-\dfrac{c}{b}$

よって，接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{\text{クケ}\,-c}{\text{コ}\,b}$ である。

a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 ℓ および直線 $x=-\dfrac{c}{b}$ で囲まれた図形の面積を S とすると

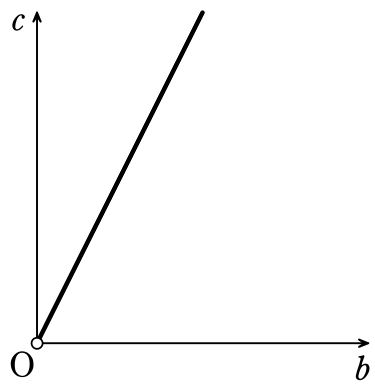


$$S=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}ax^2dx=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{-\frac{c}{b}}^{0}$$

$$=\frac{ac^{\text{サ}3}}{\text{シ}3b^{\text{ス}3}}\quad\cdots\cdots ③$$

③ において，$a=1$ とし，S の値が一定となるように正の実数 b，c の値を変化させる。



このとき，$S=\dfrac{c^3}{3b^3}$ から

$$c^3=3Sb^3$$

ゆえに　　$c=\sqrt[3]{3S}\,b$

S の値が一定であるから，$\sqrt[3]{3S}$ は正の定数である。

よって，b と c の関係を表すグラフの概形は右の図のようになる。（セ ⓪）

(2)　(1) と同様に考えると，④，⑤，⑥ の 3 次関数には次の共通点があることがわかる。

y 軸との交点の y 座標は ソ5 である。

y 軸との交点における接線の方程式は $y=$ タ$3x+$ チ5 である。

a，b，c，d を 0 でない実数とする。

曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $(0,\ {}^{\text{ツ}}d)$ における接線の方程式は $y={}^{\text{テ}}cx+{}^{\text{ト}}d$ である。

次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=cx+d$ とし，$f(x)-g(x)$ について考える。

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと　　$h(x)=ax^3+bx^2=ax^2\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$

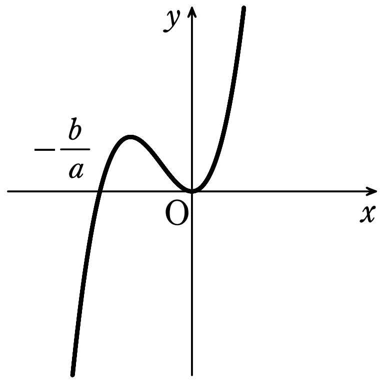
$h(x)=0$ を解くと　　$x=0$ (重解)，$-\dfrac{b}{a}$

a，b が正の実数であるとき，$y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，$-\dfrac{b}{a}$ と 0 であり

$$-\frac{b}{a}<0$$

$h(x)=0$ は $x=0$ を重解にもつから，$y=h(x)$ のグラフは x 軸と原点で接する。

よって，$y=h(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。(${}^{\text{ナ}}$②)



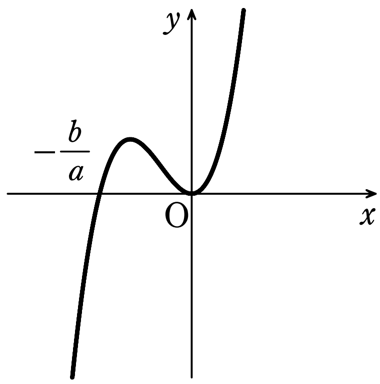
$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $h(x)=0$ の解であるから，

$\dfrac{{}^{\text{ニヌ}}-b}{{}^{\text{ネ}}a}$ と ${}^{\text{ノ}}0$ である。

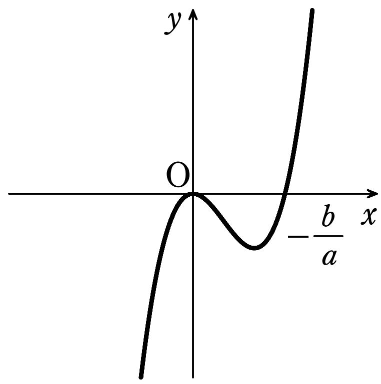
また，x が $-\dfrac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|$ すなわち $|h(x)|$ の値が最大となる x の値を求める。

a，b の正負によって，$y=h(x)$ のグラフの概形は，次の 4 つの場合に分けられる。

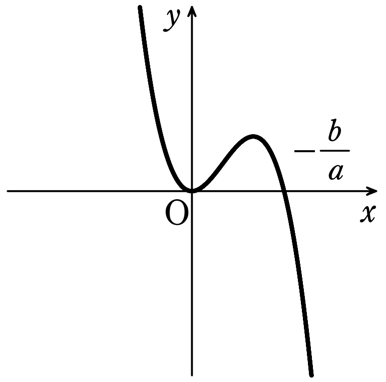
[1]　$a>0$，$b>0$ のとき



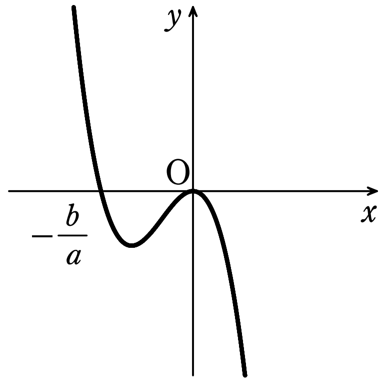
[2]　$a>0$，$b<0$ のとき



[3]　$a<0$，$b>0$ のとき



[4]　$a<0$，$b<0$ のとき



いずれの場合も $h(x)$ は $-\dfrac{b}{a}$ と 0 の間で極大値または極小値をとり，このとき $|h(x)|$ は最大となる。

ここで　　$h'(x)=3ax^2+2bx=3ax\left(x+\dfrac{2b}{3a}\right)$

$h'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ -\dfrac{2b}{3a}$

よって，x が $-\dfrac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき，$|h(x)|$ すなわち $|f(x)-g(x)|$ の値が最大となるのは，$x=\dfrac{{}^{\text{ハヒフ}}-2b}{{}^{\text{ヘホ}}3a}$ のときである。

注意　問題文の後半で $|f(x)-g(x)|$ という表現があるため，a，b，c，d が正の実数であるという条件は，(ナ) のみに限定されているものとして解答した。
ただし，本問では (ニ) 以降も a，b，c，d が正の実数であるとして解答しても正解が得られる。