数学Ⅱ・B　第 1 問〔2〕

(1)　$f(0)=\dfrac{1+1}{2}={}^{セ}1$，$g(0)=\dfrac{1-1}{2}={}^{ソ}0$

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=1$$

等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

よって，$f(x)$ は $x={}^{タ}0$ で最小値 ${}^{チ}1$ をとる。

$g(x)=-2$ とすると　$\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-2$

分母を払うと　$2^x-2^{-x}=-4$

両辺に 2^x を掛けて整理すると　$(2^x)^2+4\cdot2^x-1=0$

$2^x>0$ であるから　$2^x=-2+\sqrt{5}$　すなわち　$2^x=\sqrt{5}-2$

よって，$g(x)=-2$ となる x の値は $\log_2(\sqrt{{}^{ツ}5}-{}^{テ}2)$ である。

(2)　$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}=f(x)$　(^{ト} ⓪)　……①

$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-g(x)$　(^{ナ} ③)　……②

$$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{4^x+2+4^{-x}}{4}-\frac{4^x-2+4^{-x}}{4}={}^{ニ}1 \quad \cdots\cdots③$$

$$g(2x)=\frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}=2\cdot\frac{2^x+2^{-x}}{2}\cdot\frac{2^x-2^{-x}}{2}={}^{ヌ}2f(x)g(x) \quad \cdots\cdots④$$

別解　③　$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}$

$=2^x\cdot2^{-x}={}^{ニ}1$

(3)　(1) より $f(0)=1$，$g(0)=0$ であるから，太郎さんが考えた式 (A) ～ (D) に $\beta=0$ を代入すると，それぞれ次のようになる。

(A)　$f(\alpha)=g(\alpha)$　　(B)　$f(\alpha)=f(\alpha)$　　(C)　$g(\alpha)=f(\alpha)$

(D)　$g(\alpha)=-g(\alpha)$ より　$g(\alpha)=0$

(2) の ③ から　$\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=1$

したがって，$f(x)-g(x)\fallingdotseq 0$ すなわち $f(x)\fallingdotseq g(x)$ であるから，(A)，(C) はつねには成り立たないことがわかる。

また，$g(1)=\dfrac{2-2^{-1}}{2}\fallingdotseq 0$ であるから，$\alpha=1$，$\beta=0$ のとき (D) は成り立たない。

よって，式 (A) ～ (D) のうち，(B) 以外の 3 つは成り立たないことがわかる。(^{ネ} ①)

参考　(B) の左辺と右辺をそれぞれ計算すると，次のようになる。

$$f(\alpha+\beta)=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta) &= \frac{2^{\alpha}+2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^{\beta}+2^{-\beta}}{2}+\frac{2^{\alpha}-2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^{\beta}-2^{-\beta}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(2^{\alpha+\beta}+2^{\alpha-\beta}+2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}) \\
&\qquad +\frac{1}{4}(2^{\alpha+\beta}-2^{\alpha-\beta}-2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}) \\
&= \frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}
\end{aligned}
$$

したがって，(B) はつねに成り立つ。