数学Ⅱ・B　第 1 問〔1〕

(1)　$\sin\dfrac{\pi}{{}^{ア}3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから，三角関数の合成により

$$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)={}^{イ}2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

と変形できる。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ であるから，y は $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{{}^{ウ}6}$ で最大値 ${}^{エ}2$ をとる。

(2)　(i)　$p=0$ のとき　$y=\sin\theta$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから，y は $\theta=\dfrac{\pi}{{}^{オ}2}$ で最大値 ${}^{カ}1$ をとる。

(ii)　$p>0$ のとき

加法定理 $\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$ を用いると

$$y=\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{1+p^2}(\sin\alpha\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta)$$

$$=\sqrt{1+p^2}(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\cos\alpha)$$

$$=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)\quad({}^{キ}⑨)$$

と表すことができる。ただし，α は

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\ ({}^{ク}①),\ \cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ ({}^{ケ}③),\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\alpha\leqq\theta-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ であるから，$\cos(\theta-\alpha)$ は $\theta-\alpha=0$ すなわち $\theta=\alpha$ で最大となる。$\sqrt{1+p^2}>0$ であるから，このとき y も最大となる。

よって，y は $\theta=\alpha$（^{コ}①）で最大値 $\sqrt{1+p^2}$（^{サ}⑨）をとる。

(iii)　$p<0$ のとき

加法定理 $\cos(\theta+\beta)=\cos\theta\cos\beta-\sin\theta\sin\beta$ を用いると

$$y=\sin\theta-(-p)\cos\theta=-(-p\cos\theta-\sin\theta)$$

$$=-\sqrt{1+p^2}\left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta\right)$$

$$=-\sqrt{1+p^2}(\cos\beta\cos\theta-\sin\beta\sin\theta)$$

$$=-\sqrt{1+p^2}(\cos\theta\cos\beta-\sin\theta\sin\beta)$$

$$=-\sqrt{1+p^2}\cos(\theta+\beta)$$

と表すことができる。ただし，β は

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\ \cos\beta=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\beta\leqq\theta+\beta\leqq\frac{\pi}{2}+\beta$ であるから，$\cos(\theta+\beta)$ は $\theta+\beta=\frac{\pi}{2}+\beta$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ で最小となる。$-\sqrt{1+p^2}<0$ であるから，このとき y は最大となる。

よって，y は $\theta=\frac{\pi}{2}$（シ ②）で最大値 1（ス ①）をとる。

別解　(iii)　$p<0$ のとき

加法定理 $\sin(\theta-\beta)=\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta$ を用いると

$$\begin{aligned}y&=\sin\theta-(-p)\cos\theta\\&=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta-\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{1+p^2}(\cos\beta\sin\theta-\sin\beta\cos\theta)\\&=\sqrt{1+p^2}(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)\\&=\sqrt{1+p^2}\sin(\theta-\beta)\end{aligned}$$

と表すことができる。ただし，β は

$$\sin\beta=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$-\beta\leqq\theta-\beta\leqq\frac{\pi}{2}-\beta$ であるから，$\sin(\theta-\beta)$ は $\theta-\beta=\frac{\pi}{2}-\beta$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大となる。$\sqrt{1+p^2}>0$ であるから，このとき y も最大となる。

よって，y は $\theta=\frac{\pi}{2}$（シ ②）で最大値 1（ス ①）をとる。