数学Ⅰ・A 第１問〔1〕

$2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$ ……①

(1) $c=1$ のとき，① の左辺は

$$2x^2+(4\cdot1-3)x+2\cdot1^2-1-11=2x^2+x-10=({}^{ア}2x+{}^{イ}5)(x-{}^{ウ}2)$$

よって，① の解は $x=-\dfrac{5}{2}$，2

(2) $c=2$ のとき，① は $2x^2+(4\cdot2-3)x+2\cdot2^2-1-11=0$

すなわち $2x^2+5x-5=0$

よって，① の解は $x=\dfrac{-{}^{エ}5\pm\sqrt{{}^{オカ}65}}{{}^{キ}4}$

大きい方の解を α とすると $\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$

よって $\dfrac{5}{\alpha}=5\cdot\dfrac{4}{-5+\sqrt{65}}=\dfrac{20(5+\sqrt{65})}{(-5+\sqrt{65})(5+\sqrt{65})}=\dfrac{{}^{ク}5+\sqrt{{}^{ケコ}65}}{{}^{サ}2}$

$8<\sqrt{65}<9$ であるから $\dfrac{5+8}{2}<\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}<\dfrac{5+9}{2}$

すなわち $\dfrac{13}{2}<\dfrac{5}{\alpha}<7$ したがって $6<\dfrac{5}{\alpha}<7$

よって，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は ${}^{シ}6$

(3) ① の解は $x=\dfrac{-(4c-3)\pm\sqrt{(4c-3)^2-4\cdot2\cdot(2c^2-c-11)}}{2\cdot2}$

$$=\frac{-(4c-3)\pm\sqrt{-16c+97}}{4}$$

① の解が異なる 2 つの有理数であるとき，根号の中は，n を正の整数とすると

$$-16c+97=n^2$$

と表すことができる。

$c=1$ のとき (1) より ① の解は異なる 2 つの有理数になる。

$c=2$ のとき (2) より ① の解は異なる 2 つの無理数になる。

$c=3$ のとき $-16\cdot3+97=49=7^2$ より ① の解は異なる 2 つの有理数になる。

$c=4$ のとき $-16\cdot4+97=33$ より ① の解は異なる 2 つの無理数になる。

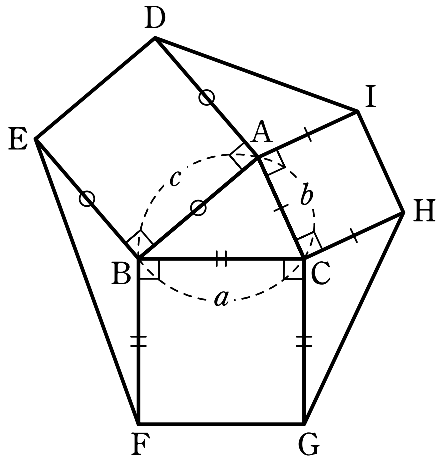
$c=5$ のとき $-16\cdot5+97=17$ より ① の解は異なる 2 つの無理数になる。

$c=6$ のとき $-16\cdot6+97=1=1^2$ より ① の解は異なる 2 つの有理数になる。

$c\geqq7$ のとき $-16c+97<0$ より ① は実数の解をもたない。

よって，① の解が異なる 2 つの有理数であるような正の整数 c の個数は ${}^{ス}3$ 個

数学Ⅰ・A 第１問〔2〕



(1)　$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

$\sin A>0$ より　　$\sin A=\dfrac{{}^{セ}4}{{}^{ソ}5}$

よって

$\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\dfrac{4}{5}={}^{タチ}12$

また，$\angle \mathrm{IAD}=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+A)$

$=180^\circ-A$　……①

であるから

$\sin\angle \mathrm{IAD}=\sin A=\dfrac{4}{5}$

$\mathrm{AI}=\mathrm{AC}=b=6$，$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}=c=5$ であるから

$\triangle \mathrm{AID}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\dfrac{4}{5}={}^{ツテ}12$

(2)　$S_1=a^2$，$S_2=b^2$，$S_3=c^2$ であるから

$S_1-S_2-S_3=a^2-b^2-c^2$

$\triangle \mathrm{ABC}$ において，

$0^\circ<A<90^\circ$ のとき　$a^2<b^2+c^2$　よって　$S_1-S_2-S_3<0$　（^{ト}②）

$A=90^\circ$ のとき　$a^2=b^2+c^2$　よって　$S_1-S_2-S_3=0$　（^{ナ}⓪）

$90^\circ<A<180^\circ$ のとき　$a^2>b^2+c^2$　よって　$S_1-S_2-S_3>0$　（^{ニ}①）

(3)　$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を T とおくと　$T=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

(1) と同様に考えて

$T_1=\dfrac{1}{2}\mathrm{AI}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle \mathrm{IAD}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

よって　$T_1=T$

T_2 についても T_1 と同様に考えて

$T_2=\dfrac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BF}\sin\angle \mathrm{EBF}=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

よって　$T_2=T$

T_3 についても同様にして $T_3=T$ が示せる。

以上により，

a，b，c の値に関係なく，$T_1=T_2=T_3\,(=T)$　（^{ヌ}③）

(4)　$\triangle \mathrm{ABC}$ と $\triangle \mathrm{AID}$ において，$\mathrm{AC}=\mathrm{AI}=b$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=c$ であるから，ID と BC の大小関係は，$\angle \mathrm{IAD}$ と A の大小関係と一致する。

$0^\circ<A<90^\circ$ のとき，$\angle \mathrm{IAD}=180^\circ-A$ より　$90^\circ<\angle \mathrm{IAD}<180^\circ$

よって　　$\angle \mathrm{IAD} > A$

したがって　$\mathrm{ID} > \mathrm{BC}$　(ネ ②)

$\triangle \mathrm{ABC}$，$\triangle \mathrm{AID}$，$\triangle \mathrm{BEF}$，$\triangle \mathrm{CGH}$ の外接円の半径を，それぞれ R，R_1，R_2，R_3 とおく。

このとき，それぞれの三角形において，正弦定理により

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad 2R_1 = \frac{\mathrm{ID}}{\sin \angle \mathrm{IAD}} = \frac{\mathrm{ID}}{\sin A},$$

$$2R_2 = \frac{\mathrm{EF}}{\sin \angle \mathrm{EBF}} = \frac{\mathrm{EF}}{\sin B}, \quad 2R_3 = \frac{\mathrm{GH}}{\sin \angle \mathrm{GCH}} = \frac{\mathrm{GH}}{\sin C}$$

$\mathrm{ID} > a$ であるから　$\dfrac{\mathrm{ID}}{\sin A} > \dfrac{a}{\sin A}$　すなわち　$2R_1 > 2R$

よって　$R_1 > R$　(ノ ②)

同様に考えて，$0° < B < 90°$，$0° < C < 90°$ のとき　$\mathrm{EF} > b$，$\mathrm{GH} > c$

よって　$R_2 > R$，$R_3 > R$

以上により，

　$0° < A < B < C < 90°$ のとき，外接円の半径が最も小さい三角形は　$\triangle \mathrm{ABC}$ (ハ ⓪)

$90° < C$ のとき，$\angle \mathrm{GCH} = 180° - C$ より　$0° < \angle \mathrm{GCH} < 90°$

よって　　$\mathrm{GH} < c$

したがって　$R_3 < R$

$0° < A < B < 90°$ のとき，$R_1 > R$，$R_2 > R$ であるから，

　$0° < A < B < 90° < C$ のとき，外接円の半径が最も小さい三角形は　$\triangle \mathrm{CGH}$ (ヒ ③)

数学Ⅰ・A 第2問〔1〕

(1)　平均速度すなわち1秒あたりの進む距離は

　(1秒あたりの歩数)×(1歩あたりの進む距離)$= z \times x = xz$　(ア ②)

よって　タイム$= \dfrac{100}{xz}$　……①

参考　$x = \dfrac{100\,(\mathrm{m})}{100\ \mathrm{m}\ \text{を走るのにかかった歩数}\,(\text{歩})}$,

　$z = \dfrac{100\ \mathrm{m}\ \text{を走るのにかかった歩数}\,(\text{歩})}{\text{タイム}\,(\text{秒})}$

であるから

　平均速度

$= \dfrac{100\,(\mathrm{m})}{\text{タイム}\,(\text{秒})}$

$= \dfrac{100\,(\mathrm{m})}{100\ \mathrm{m}\ \text{を走るのにかかった歩数}\,(\text{歩})} \cdot \dfrac{100\ \mathrm{m}\ \text{を走るのにかかった歩数}\,(\text{歩})}{\text{タイム}\,(\text{秒})}$

$= xz\,(\mathrm{m}/\text{秒})$　(ア ②)

(2)　ストライドが0.05大きくなるとピッチが0.1小さくなるから，k を実数として

$z=\dfrac{-0.1}{0.05}x+k$ すなわち $z=-2x+k$ と表される。

$x=2.10$，$z=4.60$ を代入すると　　$4.60=-2\cdot 2.10+k$

よって　　$k=8.8=\dfrac{44}{5}$

したがって　　$z=^{イウ}-2x+\dfrac{^{エオ}44}{5}$　……②

$z\leqq 4.80$ であるから　　$-2x+\dfrac{44}{5}\leqq 4.80$

これを解くと　　$x\geqq 2$

$x\leqq 2.40$ であるから，x の値の範囲は　　$^{カ}2.^{キク}00\leqq x\leqq 2.40$

$y=xz$ とおくと　　$y=x\left(-2x+\dfrac{44}{5}\right)=-2x^2+\dfrac{44}{5}x=-2\left(x-\dfrac{11}{5}\right)^2+\dfrac{242}{25}$

$2.00\leqq x\leqq 2.40$ のとき，y は $x=\dfrac{11}{5}$ すなわち $x=^{ケ}2.^{コサ}20$ のときに最大値 $\dfrac{242}{25}$ をとる。

このとき　　$z=-2\cdot\dfrac{11}{5}+\dfrac{44}{5}=\dfrac{22}{5}=^{シ}4.^{スセ}40$

また，① よりタイムは　　$100\div\dfrac{242}{25}=\dfrac{1250}{121}=10.330\cdots\fallingdotseq 10.33$　（^{ソ} ③）

数学Ⅰ・A　第２問〔2〕

(1)　⓪　第１次産業の就業者数割合の四分位範囲，すなわち箱の長さは，2000年度までは，後の時点になるにしたがって短くなっている。
よって，正しい。

①　1990年度については，第１次産業の就業者数割合の右側のひげの長さの方が長い。
よって，正しくない。

②　第２次産業の就業者数割合の中央値を表す線は，1990年度以降，後の時点になるにしたがって左側に移動している。
よって，正しい。

③　1985年度から1990年度の間については，第２次産業の就業者数割合の第１四分位数を表す線が右側に移動している。
よって，正しくない。

④　第３次産業の就業者数割合の第３四分位数を表す線は，後の時点になるにしたがって右側に移動している。
よって，正しい。

⑤　第３次産業の就業者数割合の最小値を表す線は，後の時点になるにしたがって右側に移動している。
よって，正しい。

以上から　　タ①，チ③　（またはタ③，チ①）

(2)　1985年度において，第1次産業の就業者数割合の最大値は25％以上30％未満の区間にあり，①と③の2つのグラフがこの条件を満たす。

また，第3次産業の就業者数割合の最小値は45％であるから，45％以上50％未満の区間にある。

①と③の2つのグラフのうち，最小値が45％以上50％未満の区間にあるのは

ツ①

1995年度において，第1次産業の就業者数割合の最大値は15％以上20％未満であり，②と④の2つのグラフがこの条件を満たす。

また，第3次産業の就業者数割合の中央値は55％以上60％未満である。都道府県は47あるから，就業者数割合を値の大きさの順に並べたとき，下から24番目の値が中央値である。

②と④の2つのグラフのうち，55％以上60％未満の区間に下から24番目の値を含んでいるのは　テ④

参考　グラフの判断方法は他にもある。例えば，1985年度の第1次産業の就業者数割合の第1四分位数は5％以上10％未満である。①と③の2つのグラフのうちこれを満たすのは①であり，実は第3次産業の就業者数割合のグラフに注目しなくても判断できる。

(3)　(I)　散布図から，1975年度に比べて2015年の方が相関が強くなったとはいえない。よって，誤りである。

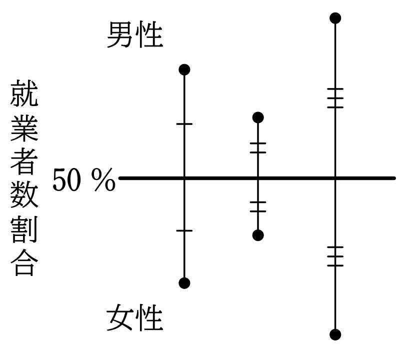
(II)　1975年度の散布図に比べて，2015年の散布図の方がより直線的に分布している。よって，正しい。

(III)　散布図から，1975年度に比べて2015年の方が相関が強くなったとはいえない。よって，誤りである。

以上から　　ト⑤

(4)　各都道府県の，男性の就業者数と女性の就業者数を合計すると就業者数全体になることから，散布図において，各都道府県の女性の就業者数割合の点は，縦軸の50を表す直線に関して，男性の就業者数割合の点と対称な位置にある。

したがって，第1次産業の就業者数割合と，女性の就業者数割合の散布図は，図4の散布図を上下反転させたものとなる。



よって　　ナ②

数学Ⅰ・A　第3問

(1)　(i)　箱 A において，3 回中ちょうど 1 回当たる確率は　${}_3C_1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{{}^{ア}3}{{}^{イ}8}$ ……①

箱 B において，3 回中ちょうど 1 回当たる確率は　${}_3C_1\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{{}^{ウ}4}{{}^{エ}9}$ ……②

(ii)　$P(A\cap W)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{16}$，$P(B\cap W)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{2}{9}$ であるから

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)=\frac{3}{16}+\frac{2}{9}=\frac{59}{144}$$

よって　$P_W(A)=\dfrac{P(A\cap W)}{P(W)}=\dfrac{3}{16}\div\dfrac{59}{144}=\dfrac{{}^{オカ}27}{{}^{キク}59}$

また　$P_W(B)=\dfrac{P(B\cap W)}{P(W)}=\dfrac{2}{9}\div\dfrac{59}{144}=\dfrac{{}^{ケコ}32}{{}^{サシ}59}$

(2)　$P_W(A):P_W(B)=\dfrac{27}{59}:\dfrac{32}{59}=27:32$

また　(① の確率) : (② の確率)$=\dfrac{3}{8}:\dfrac{4}{9}=\dfrac{27}{72}:\dfrac{32}{72}=27:32$

よって，$P_W(A)$ と $P_W(B)$ の比は，① の確率と ② の確率の比に等しい。　(ス ③)

参考　⓪　$\dfrac{27}{59}+\dfrac{32}{59}\fallingdotseq\dfrac{27}{72}+\dfrac{32}{72}$　①　$\left(\dfrac{27}{59}\right)^2+\left(\dfrac{32}{59}\right)^2\fallingdotseq\left(\dfrac{27}{72}\right)^2+\left(\dfrac{32}{72}\right)^2$

②　$\left(\dfrac{27}{59}\right)^3+\left(\dfrac{32}{59}\right)^3\fallingdotseq\left(\dfrac{27}{72}\right)^3+\left(\dfrac{32}{72}\right)^3$　④　$\dfrac{27}{59}\times\dfrac{32}{59}\fallingdotseq\dfrac{27}{72}\times\dfrac{32}{72}$

別解　$P_W(A)=\dfrac{1}{2}\times$(① の確率)$\div P(W)$，$P_W(B)=\dfrac{1}{2}\times$(② の確率)$\div P(W)$

であるから，$P_W(A):P_W(B)=$(① の確率) : (② の確率) が成り立つ。(ス ③)

(3)　箱 C において，3 回中ちょうど 1 回当たる確率は　${}_3C_1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{27}{64}$ ……③

3 つの箱の場合でも，事実 (＊) と同様のことが成り立つから，箱 C が選ばれる事象を C とすると　$P_W(A):P_W(B):P_W(C)=$(① の確率) : (② の確率) : (③ の確率)

$$=\frac{3}{8}:\frac{4}{9}:\frac{27}{64}=216:256:243$$

$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W)$ であるから，求める条件付き確率は

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{216}{216+256+243}=\frac{{}^{セソタ}216}{{}^{チツテ}715}$$

参考　(1) と同様に計算すると

$$P(A\cap W)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8},\quad P(B\cap W)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{27},\quad P(C\cap W)=\frac{1}{3}\times\frac{27}{64}=\frac{9}{64}$$

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)+P(C\cap W)=\frac{1}{8}+\frac{4}{27}+\frac{9}{64}=\frac{715}{1728}$$

よって　　$P_W(A)=\dfrac{P(A\cap W)}{P(W)}=\dfrac{1}{8}\div\dfrac{715}{1728}=\dfrac{^{セソタ}216}{^{チツテ}715}$

(4)　箱 D において，3 回中ちょうど 1 回当たる確率は　　${}_3C_1\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{48}{125}$ ……④

4 つの箱の場合でも，事実 (＊) と同様のことが成り立つから，① ～ ④ の確率の大小を比較したとき，その確率が大きい箱ほど，くじを引いた可能性が高いことがわかる。

$256>243>216$ であるから　　$\dfrac{4}{9}>\dfrac{27}{64}>\dfrac{3}{8}$

これと $\dfrac{27}{64}:\dfrac{48}{125}=1125:1024$，$\dfrac{3}{8}:\dfrac{48}{125}=125:128$ より

$$\frac{4}{9}>\frac{27}{64}>\frac{48}{125}>\frac{3}{8}$$

したがって，可能性が高い方から順に並べると　　B，C，D，A　(ト ⑧)

別解　$\dfrac{3}{8}=0.375$，$\dfrac{4}{9}=0.444\cdots\cdots$，$\dfrac{27}{64}=0.421\cdots\cdots$，$\dfrac{48}{125}=0.384$ より

$$\frac{4}{9}>\frac{27}{64}>\frac{48}{125}>\frac{3}{8}$$

したがって，可能性が高い方から順に並べると　　B，C，D，A　(ト ⑧)

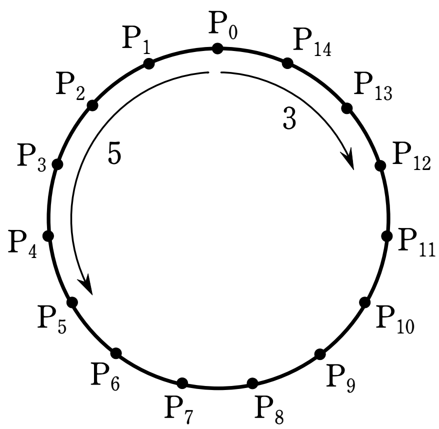
数学Ⅰ・A　第 4 問

(1)　偶数の目が x 回，奇数の目が $(5-x)$ 回出たとき，点 P_0 にある石が点 P_1 に移動したとすると

$5x-3(5-x)=1$

これを解くと　　$x=2$

よって，さいころを 5 回投げて，偶数の目が $^{ア}2$ 回，奇数の目が $^{イ}3$ 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_1 に移動させることができる。



参考　$x=2$，$y=3$ は不定方程式 $5x-3y=1$ の整数解の 1 つであり　　$5\times2-3\times3=1$

(2)　$5x-3y=8$ ……①

$5\times2-3\times3=1$ の両辺に 8 を掛けて　　$5\times(2\times8)-3\times(3\times8)=8$ ……②

①－② から　$5(x-2\times8)-3(y-3\times8)=0$

すなわち　　$5(x-2\times8)=3(y-3\times8)$ ……③

5 と 3 は互いに素であるから，$x-2\times8$ は 3 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-2\times8=3k$ と表される。

これを ③ に代入すると　　$5\times3k=3(y-3\times8)$　　　すなわち　　$y-3\times8=5k$

したがって　　　$x=2\times8+{}^{ウ}3k$，$y=3\times8+{}^{エ}5k$

$0\leqq y<5$ を満たすとき，$0\leqq3\times8+5k<5$ から　　$-\dfrac{24}{5}\leqq k<-\dfrac{19}{5}$

これを満たす整数 k は　　$k=-4$　　　　このとき　　$x={}^{オ}4$，$y={}^{カ}4$

したがって，さいころを $4+4={}^{キ}8$ 回投げて，偶数の目が 4 回，奇数の目が 4 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。

(3)　(＊) に注目すると，偶数の目が 3 回出るか，奇数の目が 5 回出ると元の点に戻る。

よって，(2) の結果において，偶数の目が出た 4 回のうちの 3 回の移動を減らしたとしても，点 P_0 にある石は点 P_8 に移動することがわかる。

したがって，偶数の目が $4-3={}^{ク}1$ 回，奇数の目が ${}^{ケ}4$ 回出れば，さいころを投げる回数が $1+4={}^{コ}5$ 回で，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。

(4)　(3) と同様に考えて，偶数の目が 3 回以上出る場合は，その回数を 3 回ずつ繰り返し減らすことによって，0 回～ 2 回のいずれかまで少なくすることができる。

同様に，奇数の目が 5 回以上出る場合も，その回数を 5 回ずつ繰り返し減らすことによって，0 回～ 4 回のいずれかまで少なくすることができる。

$0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 4$ を満たす整数 x，y に対して，偶数の目が x 回，奇数の目が y 回出たときに石が移動する点を調べると，右の表のようになる。

表より，P_1，P_2，……，P_{14} のすべての点が 1 回ずつ現れることがわかる。

x \ y	0	1	2	3	4
0	(P_0)	P_{12}	P_9	P_6	P_3
1	P_5	P_2	P_{14}	P_{11}	P_8
2	P_{10}	P_7	P_4	P_1	P_{13}

したがって，最小回数が最も大きいのは点 P_{13} であり，その最小回数は $2+4={}^{シ}6$ 回である。(^{サ} ③)

別解　(3)　点 P_0 から時計回りに 7 個先に移動した点が P_8 である。

よって，不定方程式 $5x-3y=-7$ …… ④ を考えると，$5\times1-3\times4=-7$ より，$x=1$，$y=4$ は ④ の整数解の 1 つである。

したがって，偶数の目が ${}^{ク}1$ 回，奇数の目が ${}^{ケ}4$ 回出れば，さいころを投げる回数が $1+4={}^{コ}5$ 回で，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。

(4)　偶数の目が出ることを →，奇数の目が出ることを ↘ で表す。

石が移動する点を，1 回目から順に書き出していくと，次の図のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \text{1回目} & & \text{2回目} & & \text{3回目} & & \text{4回目} & & \text{5回目} & & \text{6回目} & & \cdots\cdots \\
P_0 & \to & P_5 & \to & P_{10} & \to & P_0 & \to & P_5 & \to & P_{10} & \to & P_0 & \to & \cdots \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & P_{12} & \to & P_2 & \to & P_7 & \to & P_{12} & \to & P_2 & \to & P_7 & \to & \cdots \\
 & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & P_9 & \to & P_{14} & \to & P_4 & \to & P_9 & \to & P_{14} & \to & \cdots \\
 & & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & & & P_6 & \to & P_{11} & \to & P_1 & \to & P_6 & \to & \cdots \\
 & & & & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & & & & & P_3 & \to & P_8 & \to & P_{13} & \to & \cdots \\
 & & & & & & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & & & & & & & P_0 & \to & P_5 & \to & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & & & & & & & & & P_{12} & \to & \cdots
\end{array}
$$

よって，P_1，P_2，……，P_{14} の最小回数をまとめると，右の表のようになる。
したがって，最小回数が最も大きいのは点 P_{13} であり，その最小回数は $^{シ}6$ 回である。(^{サ} ③)

最小回数	点
1	P_5，P_{12}
2	P_2，P_9，P_{10}
3	P_6，P_7，P_{14}
4	P_3，P_4，P_{11}
5	P_1，P_8
6	P_{13}

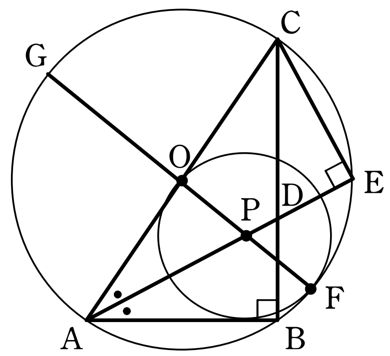
数学Ⅰ・A 第 5 問

$3^2+4^2=5^2$ であるから，$\triangle ABC$ は $\angle B=90^\circ$ の直角三角形である。

AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 3 : 5$$

したがって　$BD=\dfrac{3}{3+5}BC=\dfrac{3}{8}\cdot 4=\dfrac{^{ア}3}{^{イ}2}$



よって，$\triangle ABD$ において，三平方の定理により

$$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{^{ウ}3\sqrt{^{エ}5}}{^{オ}2}$$

また，辺 AC は円 O の直径であるから　$\angle AEC=90^\circ$

ゆえに，$\triangle AEC$ と $\triangle ABD$ において　$\angle AEC=\angle ABD=90^\circ$，$\angle CAE=\angle DAB$

よって，$\triangle AEC \backsim \triangle ABD$ であるから　$AE : AB = AC : AD$

すなわち　$AE : 3 = 5 : \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$　ゆえに　$AE={}^{カ}2\sqrt{^{キ}5}$

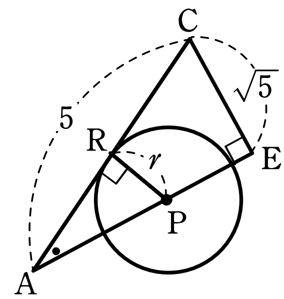
円 P は辺 AB，AC の両方に接するから，その中心は線分 AD 上にある。

点 P から辺 AC に垂線を引き，辺 AC との交点を R とする。

点 R は円 P と辺 AC の接点であるから　$PR=r$

$\triangle AEC \backsim \triangle ABD$ より，$CE : BD = AC : AD$ であるから

$$CE : \frac{3}{2} = 5 : \frac{3\sqrt{5}}{2}\qquad ゆえに\qquad CE=\sqrt{5}$$



$\angle ARP=\angle AEC=90^\circ$，$\angle PAR=\angle CAE$ より，

$\triangle APR \backsim \triangle ACE$ であるから　$AP : AC = PR : CE$

すなわち　$AP : 5 = r : \sqrt{5}$　ゆえに　$AP=\sqrt{^{ク}5}\,r$

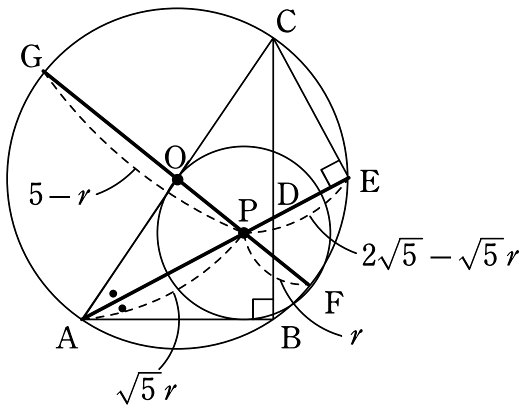
また，円 P は外接円 O に内接しているから，その接点 F と中心 P を結ぶ直線 PF は外接円 O の中心を通る。

よって，線分 GF は円 O の直径であるから

$$\mathrm{GF}=\mathrm{AC}=5$$

線分 PF は円 P の半径であるから

$$\mathrm{PF}=r$$



したがって　　$\mathrm{PG}=\mathrm{GF}-\mathrm{PF}={}^{\text{ケ}}5-r$

さらに，$\mathrm{PE}=\mathrm{AE}-\mathrm{AP}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}\,r$

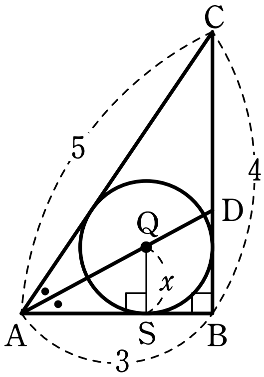
であるから，方べきの定理により

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PE}=\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PG}$$

$$\sqrt{5}\,r(2\sqrt{5}-\sqrt{5}\,r)=r(5-r)$$

両辺を $r\,(>0)$ で割って整理すると　　$4r-5=0$　　　ゆえに　　$r=\dfrac{{}^{\text{コ}}5}{{}^{\text{サ}}4}$

△ABC の内接円 Q の半径を x とする。



△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4=6$ であるから　　$\dfrac{1}{2}x(3+4+5)=6$

これを解いて　　$x=1$

よって，内接円 Q の半径は ${}^{\text{シ}}1$ である。

点 Q から辺 AB に垂線を引き，AB との交点を S とすると，

△ASQ ∽ △ABD であるから　　AQ：AD＝SQ：BD

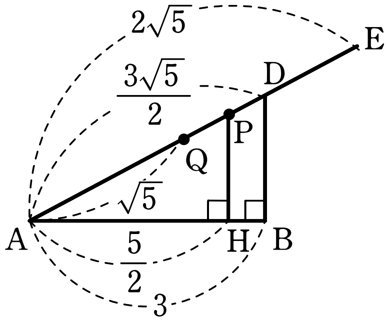
すなわち　　$\mathrm{AQ}:\dfrac{3\sqrt{5}}{2}=1:\dfrac{3}{2}$

ゆえに　　$\mathrm{AQ}=\sqrt{{}^{\text{ス}}5}$

線分 AH，AR は点 A から円 P に引いた接線であるから　　AH＝AR

また，△APR ∽ △ACE より　　$\mathrm{AR}=2r=2\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{2}$　　したがって　　$\mathrm{AH}=\dfrac{{}^{\text{セ}}5}{{}^{\text{ソ}}2}$

図形の一部をかき出すと，右のようになる。



$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AH}=3\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$$

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{5}=\frac{15}{2}$$

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AQ}=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=10$$

よって，AB・AH＝AD・AQ であるから，

方べきの定理の逆により，4 点 B，H，D，Q は

同一円周上にある。

すなわち，(a) は正しい。

また，AB・AH ≒ AE・AQ であるから，(b) は誤りである。

以上から，(a)，(b) の正誤の組合せとして正しいものは　　${}^{\text{タ}}$①

参考　$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$，$AR=\frac{5}{2}$ であるから，

点 O と点 R は一致する。

すなわち，辺 AC と円 P は外接円 O の中心で接する。