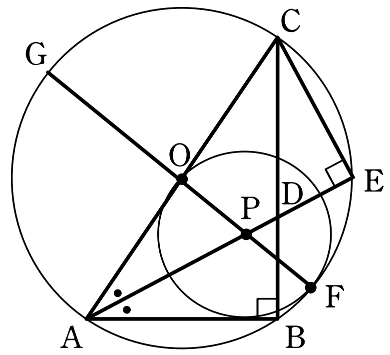
# 数学Ⅰ・A　第５問

$3^2+4^2=5^2$ であるから，△ABC は $\angle\mathrm{B}=90°$ の直角三角形である。

AD は $\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線であるから

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:5$$




したがって　$\mathrm{BD}=\dfrac{3}{3+5}\mathrm{BC}=\dfrac{3}{8}\cdot 4=\dfrac{{}^{\text{ア}}3}{{}^{\text{イ}}2}$

よって，△ABD において，三平方の定理により

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{{}^{\text{ウ}}3\sqrt{{}^{\text{エ}}5}}{{}^{\text{オ}}2}$$

また，辺 AC は円 O の直径であるから　$\angle\mathrm{AEC}=90°$

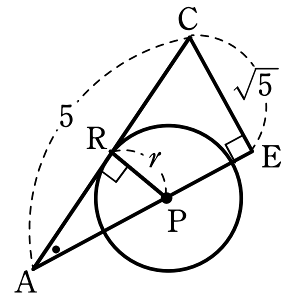
ゆえに，△AEC と △ABD において　$\angle\mathrm{AEC}=\angle\mathrm{ABD}=90°$，$\angle\mathrm{CAE}=\angle\mathrm{DAB}$

よって，$\triangle\mathrm{AEC}\backsim\triangle\mathrm{ABD}$ であるから　$\mathrm{AE}:\mathrm{AB}=\mathrm{AC}:\mathrm{AD}$

すなわち　$\mathrm{AE}:3=5:\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$　　ゆえに　$\mathrm{AE}={}^{\text{カ}}2\sqrt{{}^{\text{キ}}5}$

円 P は辺 AB，AC の両方に接するから，その中心は線分 AD 上にある。

点 P から辺 AC に垂線を引き，辺 AC との交点を R とする。




点 R は円 P と辺 AC の接点であるから　$\mathrm{PR}=r$

$\triangle\mathrm{AEC}\backsim\triangle\mathrm{ABD}$ より，$\mathrm{CE}:\mathrm{BD}=\mathrm{AC}:\mathrm{AD}$ であるから

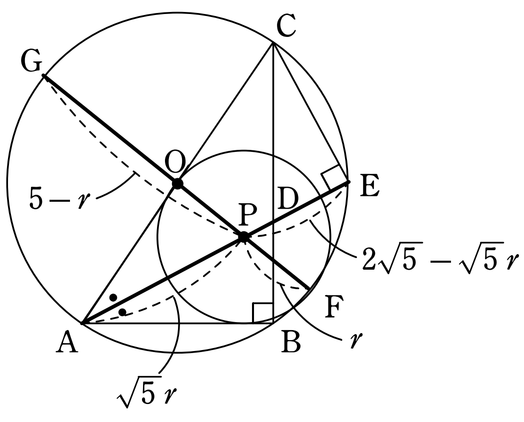
$$\mathrm{CE}:\frac{3}{2}=5:\frac{3\sqrt{5}}{2}\qquad \text{ゆえに}\qquad \mathrm{CE}=\sqrt{5}$$

$\angle\mathrm{ARP}=\angle\mathrm{AEC}=90°$，$\angle\mathrm{PAR}=\angle\mathrm{CAE}$ より，

$\triangle\mathrm{APR}\backsim\triangle\mathrm{ACE}$ であるから　$\mathrm{AP}:\mathrm{AC}=\mathrm{PR}:\mathrm{CE}$

すなわち　$\mathrm{AP}:5=r:\sqrt{5}$　　ゆえに　$\mathrm{AP}=\sqrt{{}^{\text{ク}}5}\,r$

また，円 P は外接円 O に内接しているから，その接点 F と中心 P を結ぶ直線 PF は外接円 O の中心を通る。




よって，線分 GF は円 O の直径であるから

$$\mathrm{GF}=\mathrm{AC}=5$$

線分 PF は円 P の半径であるから

$$\mathrm{PF}=r$$

したがって　$\mathrm{PG}=\mathrm{GF}-\mathrm{PF}={}^{\text{ケ}}5-r$

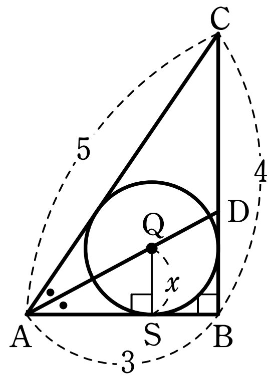
さらに，$\mathrm{PE}=\mathrm{AE}-\mathrm{AP}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}\,r$

であるから，方べきの定理により

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PE}=\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PG}$$

$$\sqrt{5}\,r(2\sqrt{5}-\sqrt{5}\,r)=r(5-r)$$

両辺を $r\,(>0)$ で割って整理すると　$4r-5=0$　　ゆえに　$r=\dfrac{{}^{\text{コ}}5}{{}^{\text{サ}}4}$




△ABCの内接円Qの半径を $x$ とする。

△ABCの面積は $\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=6$ であるから　　$\frac{1}{2}x(3+4+5)=6$

これを解いて　　$x=1$

よって，内接円Qの半径は $^{シ}1$ である。

点Qから辺ABに垂線を引き，ABとの交点をSとすると，

△ASQ ∽ △ABD であるから　　AQ：AD＝SQ：BD

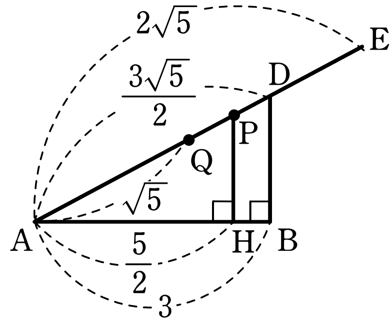
すなわち　　$\mathrm{AQ}:\frac{3\sqrt{5}}{2}=1:\frac{3}{2}$

ゆえに　　$\mathrm{AQ}=\sqrt{^{ス}5}$

線分AH，ARは点Aから円Pに引いた接線であるから　　AH＝AR

また，△APR ∽ △ACEより　　$\mathrm{AR}=2r=2\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$　　したがって　　$\mathrm{AH}=\frac{^{セ}5}{^{ソ}2}$

図形の一部をかき出すと，右のようになる。




$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AH}=3\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$$

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{5}=\frac{15}{2}$$

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AQ}=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=10$$

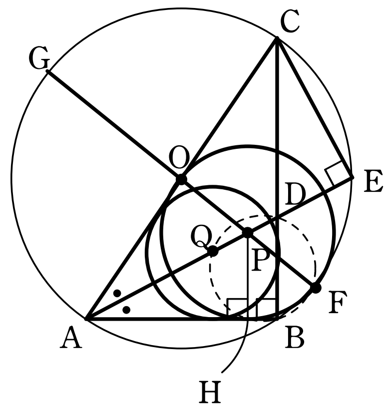
よって，AB･AH＝AD･AQ であるから，

方べきの定理の逆により，4点B，H，D，Qは同一円周上にある。

すなわち，(a)は正しい。

また，AB･AH≒AE･AQ であるから，(b)は誤りである。

以上から，(a)，(b)の正誤の組合せとして正しいものは　　$^{タ}$①




参考　AO＝$\frac{1}{2}$AC＝$\frac{5}{2}$，AR＝$\frac{5}{2}$ であるから，

点Oと点Rは一致する。

すなわち，辺ACと円Pは外接円Oの中心で接する。