

# 数学 I・A 第 4 問

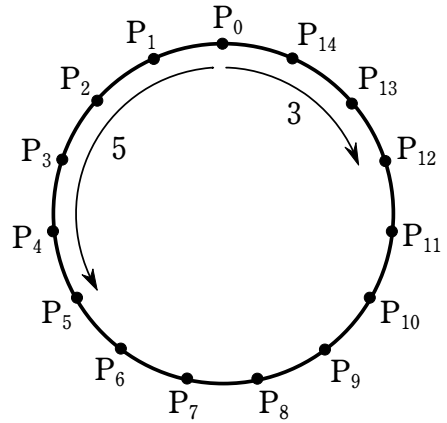
(1) 偶数の目が  $x$  回、奇数の目が  $(5-x)$  回出たとき、点  $P_0$  にある石が点  $P_1$  に移動したとすると

$$5x - 3(5-x) = 1$$

これを解くと  $x = 2$

よって、さいころを 5 回投げて、偶数の目が 2 回、奇数の目が 3 回出れば、点  $P_0$  にある石を点  $P_1$  に移動させることができる。

【参考】  $x = 2, y = 3$  は不定方程式  $5x - 3y = 1$  の整数解の 1 つであり  $5 \times 2 - 3 \times 3 = 1$



(2)  $5x - 3y = 8$  …… ①

$$5 \times 2 - 3 \times 3 = 1 \text{ の両辺に } 8 \text{ を掛けて } 5 \times (2 \times 8) - 3 \times (3 \times 8) = 8 \text{ …… ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ から } 5(x - 2 \times 8) - 3(y - 3 \times 8) = 0$$

$$\text{すなわち } 5(x - 2 \times 8) = 3(y - 3 \times 8) \text{ …… ③}$$

5 と 3 は互いに素であるから、 $x - 2 \times 8$  は 3 の倍数である。

よって、 $k$  を整数として、 $x - 2 \times 8 = 3k$  と表される。

$$\text{これを ③ に代入すると } 5 \times 3k = 3(y - 3 \times 8) \quad \text{すなわち } y - 3 \times 8 = 5k$$

$$\text{したがって } x = 2 \times 8 + {}^{\cup}3k, y = 3 \times 8 + {}^{\mp}5k$$

$$0 \leq y < 5 \text{ を満たすとき, } 0 \leq 3 \times 8 + 5k < 5 \text{ から } -\frac{24}{5} \leq k < -\frac{19}{5}$$

$$\text{これを満たす整数 } k \text{ は } k = -4 \quad \text{このとき } x = {}^{\cup}4, y = {}^{\cup}4$$

したがって、さいころを  $4 + 4 = {}^{\cup}8$  回投げて、偶数の目が 4 回、奇数の目が 4 回出れば、点  $P_0$  にある石を点  $P_8$  に移動させることができる。

(3) (\*) に注目すると、偶数の目が 3 回出るか、奇数の目が 5 回出ると元の点に戻る。

よって、(2) の結果において、偶数の目が出た 4 回のうちの 3 回の移動を減らしたとしても、点  $P_0$  にある石は点  $P_8$  に移動することがわかる。

したがって、偶数の目が  $4 - 3 = {}^{\cup}1$  回、奇数の目が  ${}^{\cup}4$  回出れば、さいころを投げる回数が  $1 + 4 = {}^{\cup}5$  回で、点  $P_0$  にある石を点  $P_8$  に移動させることができる。

(4) (3) と同様に考えて、偶数の目が 3 回以上出る場合は、その回数を 3 回ずつ繰り返し減らすことによって、0 回～2 回のいずれかまで少なくすることができる。

同様に、奇数の目が 5 回以上出る場合も、その回数を 5 回ずつ繰り返し減らすことによって、0 回～4 回のいずれかまで少なくすることができる。

$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$  を満たす整数  $x, y$  に対して、偶数の目が  $x$  回、奇数の目が  $y$  回出たときに石が移動する点を調べると、右の表ようになる。

表より、 $P_1, P_2, \dots, P_{14}$  のすべての点が 1 回ずつ現れることがわかる。

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	( $P_0$ )	$P_{12}$	$P_9$	$P_6$	$P_3$
1	$P_5$	$P_2$	$P_{14}$	$P_{11}$	$P_8$
2	$P_{10}$	$P_7$	$P_4$	$P_1$	$P_{13}$

したがって、最小回数が最も大きいのは点  $P_{13}$  であり、その最小回数は  $2 + 4 = {}^{\cup}6$  回である。(サ③)

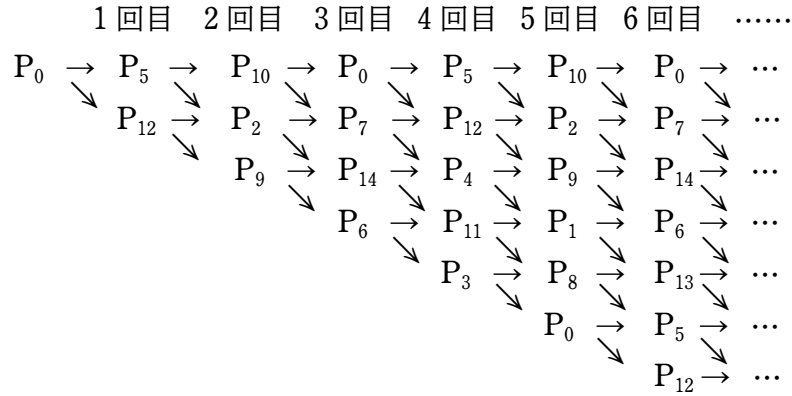
別解 (3) 点  $P_0$  から時計回りに7個先に移動した点が  $P_8$  である。

よって、不定方程式  $5x - 3y = -7 \dots\dots ④$  を考えると、 $5 \times 1 - 3 \times 4 = -7$  より、 $x=1, y=4$  は ④ の整数解の1つである。

したがって、偶数の目が  $\searrow$  1回、奇数の目が  $\swarrow$  4回出れば、さいころを投げる回数が  $1+4=5$  回で、点  $P_0$  にある石を点  $P_8$  に移動させることができる。

(4) 偶数の目が出ることを  $\rightarrow$ 、奇数の目が出ることを  $\searrow$  で表す。

石が移動する点を、1回目から順に書き出していくと、次の図のようになる。



よって、 $P_1, P_2, \dots, P_{14}$  の最小回数をまとめると、右の表のようになる。

したがって、最小回数が最も大きいのは点  $P_{13}$  であり、その最小回数は  $\searrow$  6回である。(サ③)

最小回数	点
1	$P_5, P_{12}$
2	$P_2, P_9, P_{10}$
3	$P_6, P_7, P_{14}$
4	$P_3, P_4, P_{11}$
5	$P_1, P_8$
6	$P_{13}$