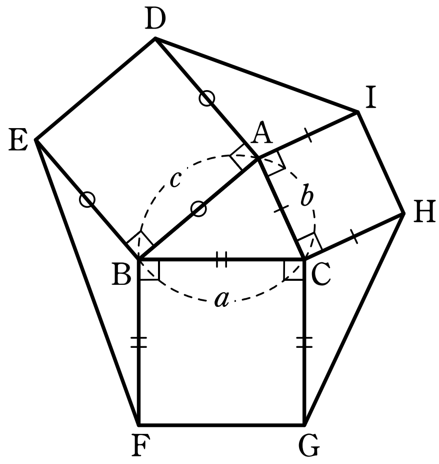
数学Ⅰ･A 第1問〔2〕



(1)　$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$

$\sin A > 0$ より　　$\sin A = \dfrac{{}^{\text{セ}}4}{{}^{\text{ソ}}5}$

よって

$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot \dfrac{4}{5} = {}^{\text{タチ}}12$

また，$\angle\mathrm{IAD} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + A)$

$= 180^\circ - A$　$\cdots\cdots$ ①

であるから

$\sin\angle\mathrm{IAD} = \sin A = \dfrac{4}{5}$

$\mathrm{AI} = \mathrm{AC} = b = 6$，$\mathrm{AD} = \mathrm{AB} = c = 5$ であるから

$\triangle\mathrm{AID} = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot \dfrac{4}{5} = {}^{\text{ツテ}}12$

(2)　$S_1 = a^2$，$S_2 = b^2$，$S_3 = c^2$ であるから

$S_1 - S_2 - S_3 = a^2 - b^2 - c^2$

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，

$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき　　$a^2 < b^2 + c^2$　　よって　$S_1 - S_2 - S_3 < 0$　（${}^{\text{ト}}$ ②）

$A = 90^\circ$ のとき　　$a^2 = b^2 + c^2$　　よって　$S_1 - S_2 - S_3 = 0$　（${}^{\text{ナ}}$ ⓪）

$90^\circ < A < 180^\circ$ のとき　$a^2 > b^2 + c^2$　　よって　$S_1 - S_2 - S_3 > 0$　（${}^{\text{ニ}}$ ①）

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を T とおくと　　$T = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

(1) と同様に考えて

$T_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{AI}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{IAD} = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

よって　　$T_1 = T$

T_2 についても T_1 と同様に考えて

$T_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BF}\sin\angle\mathrm{EBF} = \dfrac{1}{2}ca\sin B$

よって　　$T_2 = T$

T_3 についても同様にして $T_3 = T$ が示せる。

以上により，

a，b，c の値に関係なく，$T_1 = T_2 = T_3\,(=T)$　（${}^{\text{ヌ}}$ ③）

(4)　$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{AID}$ において，$\mathrm{AC} = \mathrm{AI} = b$，$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} = c$ であるから，ID と BC の大小関係は，$\angle\mathrm{IAD}$ と A の大小関係と一致する。

$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{IAD} = 180^\circ - A$ より　　$90^\circ < \angle\mathrm{IAD} < 180^\circ$

よって　　$\angle\mathrm{IAD} > A$

したがって　$\mathrm{ID}>\mathrm{BC}$　（ネ ②）

$\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{AID}$，$\triangle\mathrm{BEF}$，$\triangle\mathrm{CGH}$ の外接円の半径を，それぞれ R，R_1，R_2，R_3 とおく。

このとき，それぞれの三角形において，正弦定理により

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\quad 2R_1=\frac{\mathrm{ID}}{\sin\angle\mathrm{IAD}}=\frac{\mathrm{ID}}{\sin A},$$

$$2R_2=\frac{\mathrm{EF}}{\sin\angle\mathrm{EBF}}=\frac{\mathrm{EF}}{\sin B},\quad 2R_3=\frac{\mathrm{GH}}{\sin\angle\mathrm{GCH}}=\frac{\mathrm{GH}}{\sin C}$$

$\mathrm{ID}>a$ であるから　$\dfrac{\mathrm{ID}}{\sin A}>\dfrac{a}{\sin A}$　すなわち　$2R_1>2R$

よって　$R_1>R$　（ノ ②）

同様に考えて，$0^\circ<B<90^\circ$，$0^\circ<C<90^\circ$ のとき　$\mathrm{EF}>b$，$\mathrm{GH}>c$

よって　$R_2>R$，$R_3>R$

以上により，

　$0^\circ<A<B<C<90^\circ$ のとき，外接円の半径が最も小さい三角形は　$\triangle\mathrm{ABC}$（ハ ⓪）

$90^\circ<C$ のとき，$\angle\mathrm{GCH}=180^\circ-C$ より　$0^\circ<\angle\mathrm{GCH}<90^\circ$

よって　$\mathrm{GH}<c$

したがって　$R_3<R$

$0^\circ<A<B<90^\circ$ のとき，$R_1>R$，$R_2>R$ であるから，

　$0^\circ<A<B<90^\circ<C$ のとき，外接円の半径が最も小さい三角形は　$\triangle\mathrm{CGH}$（ヒ ③）