数学Ⅰ・A 第 1 問〔1〕

$2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$ ……①

(1) $c=1$ のとき，① の左辺は

$$2x^2+(4\cdot1-3)x+2\cdot1^2-1-11=2x^2+x-10=({}^{\text{ア}}2x+{}^{\text{イ}}5)(x-{}^{\text{ウ}}2)$$

よって，① の解は　$x=-\dfrac{5}{2}$，2

(2) $c=2$ のとき，① は　$2x^2+(4\cdot2-3)x+2\cdot2^2-1-11=0$

すなわち　$2x^2+5x-5=0$

よって，① の解は　$x=\dfrac{-{}^{\text{エ}}5\pm\sqrt{{}^{\text{オカ}}65}}{{}^{\text{キ}}4}$

大きい方の解を α とすると　$\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$

よって　$\dfrac{5}{\alpha}=5\cdot\dfrac{4}{-5+\sqrt{65}}=\dfrac{20(5+\sqrt{65})}{(-5+\sqrt{65})(5+\sqrt{65})}=\dfrac{{}^{\text{ク}}5+\sqrt{{}^{\text{ケコ}}65}}{{}^{\text{サ}}2}$

$8<\sqrt{65}<9$ であるから　$\dfrac{5+8}{2}<\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}<\dfrac{5+9}{2}$

すなわち　$\dfrac{13}{2}<\dfrac{5}{\alpha}<7$　　したがって　$6<\dfrac{5}{\alpha}<7$

よって，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は　${}^{\text{シ}}6$

(3) ① の解は　$x=\dfrac{-(4c-3)\pm\sqrt{(4c-3)^2-4\cdot2\cdot(2c^2-c-11)}}{2\cdot2}$

$$=\dfrac{-(4c-3)\pm\sqrt{-16c+97}}{4}$$

① の解が異なる 2 つの有理数であるとき，根号の中は，n を正の整数とすると

$$-16c+97=n^2$$

と表すことができる。

$c=1$ のとき　(1) より ① の解は異なる 2 つの有理数になる。

$c=2$ のとき　(2) より ① の解は異なる 2 つの無理数になる。

$c=3$ のとき　$-16\cdot3+97=49=7^2$ より ① の解は異なる 2 つの有理数になる。

$c=4$ のとき　$-16\cdot4+97=33$ より ① の解は異なる 2 つの無理数になる。

$c=5$ のとき　$-16\cdot5+97=17$ より ① の解は異なる 2 つの無理数になる。

$c=6$ のとき　$-16\cdot6+97=1=1^2$ より ① の解は異なる 2 つの有理数になる。

$c\geqq7$ のとき　$-16c+97<0$ より ① は実数の解をもたない。

よって，① の解が異なる 2 つの有理数であるような正の整数 c の個数は　${}^{\text{ス}}3$ 個