

数学Ⅱ・B 第3問

$$(1) \quad a_2 = \frac{1+3}{1+1} \{3a_1 + 3^{1+1} - (1+1)(1+2)\} = \frac{4}{2}(3 \cdot 0 + 9 - 2 \cdot 3) = {}^{\text{ア}}6$$

$$(2) \quad b_1 = \frac{a_1}{3^1(1+1)(1+2)} = \frac{0}{3 \cdot 2 \cdot 3} = {}^{\text{イ}}0$$

① の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} &= \frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} \cdot \frac{n+3}{n+1} \{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \\ &= \frac{3a_n}{3^{n+1}(n+1)(n+2)} + \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)(n+2)} - \frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad b_{n+1} = b_n + \frac{{}^{\text{ウ}}1}{(n+{}^{\text{エ}}1)(n+{}^{\text{オ}}2)} - \left(\frac{1}{{}^{\text{カ}}3}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad \text{であるから}$$

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{{}^{\text{キ}}1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\text{したがって、数列}\{b_n\}\text{の階差数列の一般項は} \quad \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

n を 2 以上の自然数とすると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-2}{2(n+1)} = \frac{1}{{}^{\text{ク}}2} \left(\frac{n-{}^{\text{ケ}}1}{n+{}^{\text{コ}}1}\right) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \frac{\frac{1}{9} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} = \frac{{}^{\text{サ}}1}{{}^{\text{シ}}6} - \frac{{}^{\text{ス}}1}{{}^{\text{セ}}2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \right\} = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) - \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3(n-1) - (n+1)}{6(n+1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{n-{}^{\text{ソ}}2}{{}^{\text{タ}}3(n+{}^{\text{チ}}1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

$$\frac{-1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad \text{より、これは } n=1 \text{ のときも成り立つ。}$$

$$(3) \quad (2) \text{ より } \quad \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)} = \frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad a_n &= \frac{3^n(n+1)(n+2)(n-2)}{3(n+1)} + \frac{3^n(n+1)(n+2)}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= {}^{\text{ツ}}3^{n-{}^{\text{テ}}1}(n^2-{}^{\text{ト}}4) + \frac{(n+{}^{\text{ナ}}1)(n+{}^{\text{ニ}}2)}{{}^{\text{ヌ}}2} \end{aligned}$$

すべての自然数 n において、 $3^{n-1}(n^2-4)$, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ は整数であるから、 a_n は整数である。

(4) 自然数 n において、 $3^{n-1}(n^2-4)$ を 3 で割った余りは 0 であるから、 a_n を 3 で割った余りは $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ を 3 で割った余りに等しい。

[1] $n=3k$ のとき

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = 3 \cdot \frac{3k(k+1)}{2} + 1$$

よって、 a_{3k} を 3 で割った余りは $\ast 1$ に等しい。

[2] $n=3k+1$ のとき

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(3k+2)(3k+3)}{2} = 3 \cdot \frac{(3k+2)(k+1)}{2}$$

よって、 a_{3k+1} を 3 で割った余りは $\circ 0$ に等しい。

[3] $n=3k+2$ のとき

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(3k+3)(3k+4)}{2} = 3 \cdot \frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

よって、 a_{3k+2} を 3 で割った余りは $\wedge 0$ に等しい。

[1]～[3] より、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは、1 から 2020 までの自然数のうち、3 の倍数の個数を 3 で割った余りに等しい。

$2020=3 \times 673+1$ であるから、3 の倍数の個数は 673

$673=3 \times 224+1$ であるから、求める余りは $\text{ヒ} 1$

参考 (合同式を用いる)

$a_{3k} \equiv 1 \pmod{3}$, $a_{3k+1} \equiv 0 \pmod{3}$, $a_{3k+2} \equiv 0 \pmod{3}$ であるから、求める余りは

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2020} a_k &\equiv 0+0+1+0+0+1+\cdots\cdots+1+0 \pmod{3} \\ &\equiv 673 \pmod{3} \\ &\equiv 1 \pmod{3} \end{aligned}$$