

数学Ⅱ・B 第2問

(1) $y = x^2 + 2x + 1$ から $y' = 2x + 2$

ℓ と C は点 $(t, t^2 + 2t + 1)$ において接するとすると, ℓ の方程式は

$$y - (t^2 + 2t + 1) = (2t + 2)(x - t)$$

すなわち $y = (2t + 2)x - t^2 + 1$ …… ①

また $f'(x) = 2x - (4a - 2) = 2x - 4a + 2$

ℓ と D は点 $(s, f(s))$ において接するとすると, ℓ の方程式は

$$y - \{s^2 - (4a - 2)s + 4a^2 + 1\} = (2s - 4a + 2)(x - s)$$

すなわち $y = (2s - 4a + 2)x - s^2 + 4a^2 + 1$ …… ②

① と ② は同じ直線を表しているから

$$2t + 2 = 2s - 4a + 2, \quad -t^2 + 1 = -s^2 + 4a^2 + 1$$

すなわち $s - t = 2a$ …… ③, $(s + t)(s - t) = 4a^2$ …… ④

③ を ④ に代入すると $2a(s + t) = 4a^2$

$a > 0$ であるから $s + t = 2a$ …… ⑤

③, ⑤ を連立して解くと $t = 0, s = 2a$

したがって, ℓ の方程式は, $t = 0$ を ① に代入して $y = 2x + 1$

(2) 2つの放物線 C, D の交点の x 座標は,

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 + 1$$

すなわち $4ax = 4a^2$ を解くと

$$x = a$$

よって, 求める面積 S は

$$S = \int_0^a \{x^2 + 2x + 1 - (2x + 1)\} dx$$

$$= \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

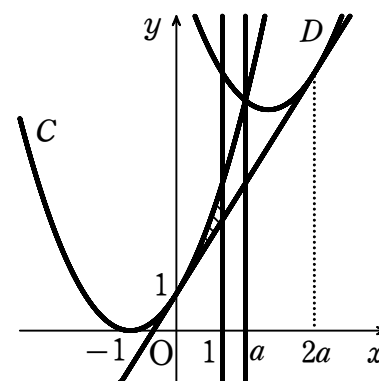
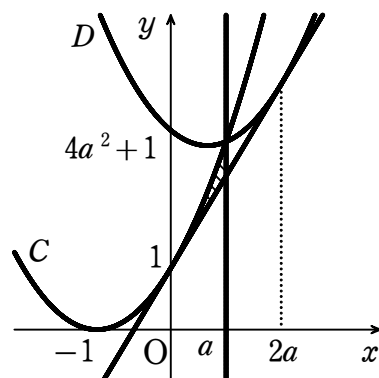
(3) 面積 T は, $a > 1$ のとき, a の値によらず

$$T = \int_0^1 \{x^2 + 2x + 1 - (2x + 1)\} dx$$

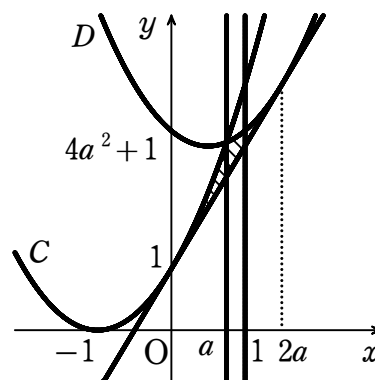
$$= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

$$T = S + \int_a^1 \{x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 + 1 - (2x + 1)\} dx$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{a^3}{3} + \int_a^1 (x^2 - 4ax + 4a^2) dx \\
&= \frac{a^3}{3} + \int_a^1 (x - 2a)^2 dx \\
&= \frac{a^3}{3} + \left[\frac{1}{3} (x - 2a)^3 \right]_a^1 \\
&= \frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} (1 - 2a)^3 - \frac{1}{3} (-a)^3 \\
&= \frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} \{ 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 2a + 3 \cdot 1 \cdot (2a)^2 - (2a)^3 \} + \frac{a^3}{3} \\
&= -\text{テ} 2a^3 + \text{ト} 4a^2 - \text{ナ} 2a + \frac{\text{ニ} 1}{\text{ス} 3}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(4) \quad U &= 2T - 3S = 2 \left(-2a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3} \right) - 3 \cdot \frac{a^3}{3} \\
&= -4a^3 + 8a^2 - 4a + \frac{2}{3} - a^3 \\
&= -5a^3 + 8a^2 - 4a + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

U を a で微分すると

$$\begin{aligned}
U' &= -15a^2 + 16a - 4 = -(15a^2 - 16a + 4) \\
&= -(3a - 2)(5a - 2)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ において $U' = 0$ となるのは $a = \frac{2}{3}$ のときである。

よって、 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ における U の増減表は、右のようになる。

a	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{2}{3}$	...	1
U'		+	0	-	
U		↗	極大	↘	

ゆえに、 U は $a = \frac{2}{3}$ で最大である。

$$\begin{aligned}
\text{このとき} \quad U &= -5 \left(\frac{2}{3} \right)^3 + 8 \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\
&= -5 \cdot \frac{8}{27} + 8 \cdot \frac{4}{9} - \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-40 + 96 - 72 + 18}{27} = \frac{2}{27}
\end{aligned}$$

したがって、 U は $a = \frac{\text{ニ} 2}{\text{ス} 3}$ で最大値 $\frac{\text{ハ} 2}{\text{ヒ} 27}$ をとる。