

数学Ⅱ・B 第1問〔2〕

(1) $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ の両辺を2乗すると $t^{\frac{2}{3}} - 2t^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = 9$

よって $t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \text{タチ}11$

$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = (t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 - 2$ であるから $(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 - 2 = 11$

ゆえに $(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 = 13$

$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} > 0$ であるから $t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\text{ツテ}13}$

また $t - t^{-1} = (t^{\frac{1}{3}})^3 - (t^{-\frac{1}{3}})^3$
 $= (t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})(t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} + t^{-\frac{2}{3}})$
 $= -3(11 + 1) = \text{トナ} -36$

(2) ②から $\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y \leq 5$

$X = \log_3 x$, $Y = \log_3 y$ とおくと $X + \frac{1}{2}Y \leq 5$

すなわち $\times 2X + Y \leq \text{ネノ}10 \dots\dots ④$

③から $\log_{81} y - 3\log_{81} x \leq 1$

$$\frac{\log_3 y}{\log_3 81} - 3 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 81} \leq 1$$

$$\frac{\log_3 y}{4} - 3 \cdot \frac{\log_3 x}{4} \leq 1$$

$$\log_3 y - 3\log_3 x \leq 4$$

$X = \log_3 x$, $Y = \log_3 y$ とおくと $Y - 3X \leq 4$

すなわち $\wedge 3X - Y \geq \text{ヒフ} -4 \dots\dots ⑤$

④×3から $6X + 3Y \leq 30$ よって $6X \leq 30 - 3Y \dots\dots ⑥$

⑤×2から $6X - 2Y \geq -8$ よって $6X \geq 2Y - 8 \dots\dots ⑦$

⑥, ⑦から $2Y - 8 \leq 6X \leq 30 - 3Y \dots\dots ⑧$

これを満たす X が存在するとき $2Y - 8 \leq 30 - 3Y$

これを解くと $Y \leq \frac{38}{5}$

したがって、 Y のとり得る最大の整数の値は $\wedge 7$ である。

$Y = 7$ のとき、⑧から $6 \leq 6X \leq 9$ よって $1 \leq X \leq \frac{3}{2}$

すなわち $1 \leq \log_3 x \leq \frac{3}{2}$ ゆえに $3 \leq x \leq 3^{\frac{3}{2}}$

$3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ であるから $5 = \sqrt{25} < 3^{\frac{3}{2}} < \sqrt{36} = 6$

したがって、 x のとり得る最大の整数の値は $\text{ホ} 5$ である。

【参考】 Y のとり得る値の範囲の求め方

④ から $Y \leq -2X + 10$

この不等式の表す領域は、直線 $Y = -2X + 10$ およびその下側の部分である。

⑤ から $Y \leq 3X + 4$

この不等式の表す領域は、直線 $Y = 3X + 4$ およびその下側の部分である。

2 直線 $Y = -2X + 10$, $Y = 3X + 4$ の交点の座標は

$$\left(\frac{6}{5}, \frac{38}{5}\right)$$

よって、④ と ⑤ を満たす不等式の表す領域は、右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

右の図から、 Y のとり得る値の範囲は

$$Y \leq \frac{38}{5}$$

