

数学Ⅱ・B 第1問〔1〕

(1) 加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta\end{aligned}$$

① から $\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta$ すなわち $\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta < 0$

三角関数の合成を用いると $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) < 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, $\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$ であるから $\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi$

したがって $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$

(2) 解と係数の関係により

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5} \quad \cdots \cdots (A), \quad \sin\theta \cos\theta = \frac{k}{25} \quad \cdots \cdots (B)$$

(A) の両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{49}{25}$$

よって $1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{49}{25}$ ゆえに $\sin\theta\cos\theta = \frac{12}{25}$

これと (B) から $\frac{k}{25} = \frac{12}{25}$ よって $k = 12$

このとき, 与えられた2次方程式は $25x^2 - 35x + 12 = 0$

ゆえに $(5x-3)(5x-4)=0$ よって $x = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

$\sin\theta \geq \cos\theta$ であるから $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}$

$\sin\theta \geq \cos\theta$ から $\sin\theta - \cos\theta \geq 0$

三角関数の合成を用いると $\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ であるから $0 \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$

よって $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \cdots \cdots (C)$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \cos\theta = \frac{3}{5}$ であるから $\cos\frac{\pi}{3} < \cos\theta$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta$ は単調に減少するから $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3} \quad \cdots \cdots (D)$

(C), (D) の共通範囲を求めて $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3} \quad (\text{㉓})$