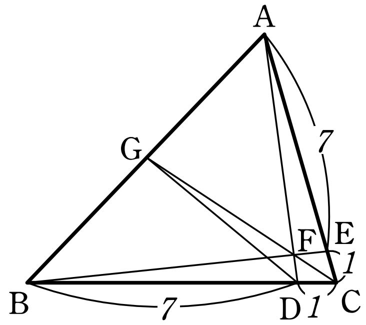
数学Ⅰ･A 第 5 問



△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GB}}=1$$

すなわち　$\dfrac{7}{1}\cdot\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GB}}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{GB}}{\mathrm{AG}}={}^{ア}1$

△ABD と直線 GC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GB}}=1$$

すなわち　$\dfrac{8}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}}\cdot\dfrac{1}{1}=1$　　よって　$\dfrac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}8}$

△AGC と直線 BE にメネラウスの定理を用いると　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BG}}\cdot\dfrac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$

すなわち　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{GF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{1}{7}=1$　　よって　$\dfrac{\mathrm{FC}}{\mathrm{GF}}=\dfrac{{}^{エ}2}{{}^{オ}7}$

△BCG の面積を S とすると，BD : DC＝7 : 1 より　$\triangle\mathrm{CDG}=\dfrac{1}{7+1}\triangle\mathrm{BCG}=\dfrac{1}{8}S$

また，CF : FG＝2 : 7 より　$\triangle\mathrm{BFG}=\dfrac{7}{2+7}\triangle\mathrm{BCG}=\dfrac{7}{9}S$

よって　$\dfrac{\triangle\mathrm{CDG}\text{の面積}}{\triangle\mathrm{BFG}\text{の面積}}=\dfrac{\frac{1}{8}S}{\frac{7}{9}S}=\dfrac{{}^{カ}9}{{}^{キク}56}$

4 点 B，D，F，G が同一円周上にあるとき，方べきの定理により

$$\mathrm{AG}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AD}\quad\cdots\cdots ①$$

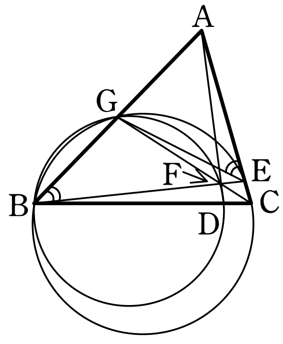
ここで，FD＝1 と AF : FD＝8 : 1 から　AF＝8

したがって　AD＝9

また，$\mathrm{AG}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$ であるから，① より　$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}^2=72$

$\mathrm{AB}^2=144$

AB＞0 であるから　$\mathrm{AB}={}^{ケコ}12$



AE : EC＝7 : 1 より $\mathrm{AC}=\dfrac{8}{7}\mathrm{AE}$ であるから，$\mathrm{AE}=3\sqrt{7}$ のとき　$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AC}=\dfrac{8}{7}\mathrm{AE}^2=\dfrac{8}{7}(3\sqrt{7})^2={}^{サシ}72$

また，AB＝12，AG＝6 より　AG･AB＝72

AG･AB＝AE･AC であるから，方べきの定理の逆により，

4 点 G，B，C，E は同一円周上にある。

したがって，四角形 GBCE は円に内接するから　∠AEG＝∠ABC　（ス ②）