

数学Ⅰ・A 第2問〔1〕

△BCDにおいて、余弦定理により

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD \\ &= 8 + 2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} = 4 \end{aligned}$$

$BD > 0$ であるから $BD = \sqrt{2}$

△BCDにおいて、余弦定理により

$$\cos \angle BDC = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD \cdot CD} = \frac{4 + 2 - 8}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\angle ADC + \angle BDC = 180^\circ$ であるから

$$\cos \angle ADC = \cos(180^\circ - \angle BDC) = -\cos \angle BDC = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle ADC > 0 \text{ であるから } \sin \angle ADC = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

△ABCにおいて、線分CDは∠ACBの二等分線であるから $AC : BC = AD : BD$

$$\text{よって } \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

ゆえに、 $AD = x$ とおくと $AC = \sqrt{2}x$

△ADCにおいて、余弦定理により $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC$

$$2x^2 = x^2 + 2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

これを解くと $x = -2, 1$

$AD > 0$ であるから $AD = 1$

よって、 $AC = \sqrt{2}$ であるから、△ADCは $CA = CD$ の二等辺三角形である。

$$\text{ゆえに、} \angle CAD = \angle CDA \text{ であるから } \sin \angle BAC = \sin \angle CDA = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

△ABCの外接円の半径を R とすると、正弦定理により $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$

$$\text{したがって } R = \frac{\sqrt{2}}{\sin \angle BAC} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

