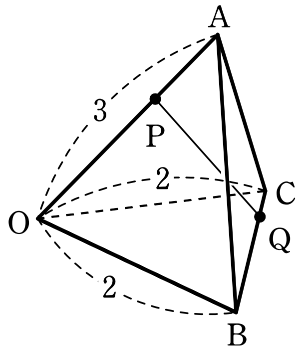
数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，



$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60°$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{COA}=3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{BOC}=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2$$

ゆえに　　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}={}^{\text{ア}}3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}={}^{\text{イ}}2$

よって　　　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|-s\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}|^2$

$$=s^2|\vec{a}|^2+(1-t)^2|\vec{b}|^2+t^2|\vec{c}|^2-2s(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2t(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}-2st\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=9s^2+4(1-t)^2+4t^2-6s(1-t)+4t(1-t)-6st$$

$$=9s^2-6s+4t^2-4t+4$$

$$=({}^{\text{ウ}}3s-{}^{\text{エ}}1)^2+({}^{\text{オ}}2t-{}^{\text{カ}}1)^2+{}^{\text{キ}}2$$

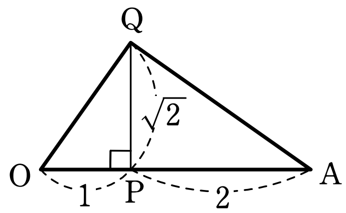
ゆえに，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ が最小となるのは $s=\dfrac{{}^{\text{ク}}1}{{}^{\text{ケ}}3}$，$t=\dfrac{{}^{\text{コ}}1}{{}^{\text{サ}}2}$ のときで，このとき　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{{}^{\text{シ}}2}$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{2}$ のとき，(1)より　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{a}\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=-\frac{1}{3}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3={}^{\text{ス}}0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから　$\angle\mathrm{APQ}={}^{\text{セソ}}90°$



$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$ で $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから

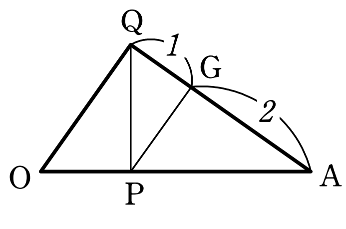
$$\mathrm{AP}=3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$$

したがって　$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{{}^{\text{タ}}2}$

点 G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{{}^{\text{チ}}1}{{}^{\text{ツ}}3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{{}^{\text{テ}}2}{{}^{\text{ト}}3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$



ゆえに，点 G は線分 AQ を ${}^{\text{ナ}}2:1$ に内分する点である。

よって　　　$\triangle\mathrm{GPQ}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ニ}}2}}{{}^{\text{ヌ}}3}$