

数学 I・A 第 4 問

1 個のさいころを投げるとき

4 以下の目が出る確率 p は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, 5 以上の目が出る確率 q は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(1) 8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は ${}_8C_3 p^3 q^5 = \text{オカ} 56 p^3 q^5$

1 回目に 4 以下の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 2 回出る事象を A ,

1 回目に 5 以上の目が出て、さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る事象を B とする。

事象 A が起こる確率は $p \times {}_7C_2 p^2 q^5 = \text{キク} 21 p^3 q^5$

事象 B が起こる確率は $q \times {}_7C_3 p^3 q^4 = \text{ケ} 35 p^3 q^5$

(2) 8 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る目の出方は、事象 A または B のいずれかである。

また、事象 A, B は互いに排反である。

よって、(1) より ${}_8C_3 p^3 q^5 = p \times {}_7C_2 p^2 q^5 + q \times {}_7C_3 p^3 q^4$

すなわち $56 p^3 q^5 = ({}_7C_2 + {}_7C_3) p^3 q^5$ ゆえに ${}_7C_2 + {}_7C_3 = 56$

さらに、 ${}_7C_2 = {}_7C_5, {}_7C_3 = {}_7C_4$ であるから ${}_7C_4 + {}_7C_5 = 56$

したがって、オカ に等しいものは サ, シ ②, ⑥

参考 ②, ⑥ 以外は、オカ と等しくない。

(3) 得点が n 点になる確率を P_n とする。

$n=6$ のとき、初めの 5 回は 5 以上の目、残りの 3 回は 4 以下の目が出るから

$$P_6 = q^5 \times p^3 = p^3 q^5$$

$n=3$ のとき、初めの 2 回は 5 以上の目、3 回目は 4 以下の目が出て、残りの 5 回のうち 4 以下の目が 2 回、5 以上の目が 3 回出るから

$$P_3 = q^2 \times p \times {}_5C_2 p^2 q^3 = {}_5C_2 p^3 q^5 = \text{ソタ} 10 p^3 q^5$$

n が他の値のときも同様にして考えると、 P_n は右の表のようになる。

また、(1) より 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は $56 p^3 q^5$ であり、これは P_n の和と等しい。

一方、4 以下の目が出た回数がちょうど 3 回とまらない確率は

$$1 - 56 p^3 q^5$$

したがって、得点の期待値は

$$\begin{aligned} & 0 \times (1 - 56 p^3 q^5) + 1 \times P_1 + 2 \times P_2 + 3 \times P_3 + 4 \times P_4 + 5 \times P_5 + 6 \times P_6 \\ &= (1 \times {}_7C_2 + 2 \times {}_6C_2 + 3 \times {}_5C_2 + 4 \times {}_4C_2 + 5 \times {}_3C_2 + 6 \times {}_2C_2) p^3 q^5 \\ &= 126 p^3 q^5 \end{aligned}$$

n	P_n
1	${}_7C_2 p^3 q^5$
2	${}_6C_2 p^3 q^5$
3	${}_5C_2 p^3 q^5$
4	${}_4C_2 p^3 q^5$
5	${}_3C_2 p^3 q^5$
6	${}_2C_2 p^3 q^5$

$p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ であるから $126 p^3 q^5 = 126 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{\text{チツテ} 112}{\text{トナ} 729}$