

数学 ・ B 第 1 問〔 1 〕

x は対数の真数であるから $x > 0$

また, (*) から $5^y = 3^{1+\log_{10} x} - 1 = 3 \cdot 3^{\log_{10} x} - 1$

$z = 3^{\log_{10} x}$ とおくと $5^y = 3z - 1 > 0$ よって $z > \frac{1}{3}$

さらに, $3^{-\log_{10} x} = \frac{1}{3^{\log_{10} x}} = \frac{1}{z}$ であるから

$$K = \frac{5^y}{3} + 3^{-\log_{10} x} = \frac{3z-1}{3} + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{z} - \frac{1}{3}$$

$z > \frac{1}{3} > 0$ であるから $\frac{1}{z} > 0$ ゆえに, 相加平均・相乗平均の関係により

$$K = z + \frac{1}{z} - \frac{1}{3} \geq 2\sqrt{z \cdot \frac{1}{z}} - \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

等号が成り立つのは $z = \frac{1}{z}$ のとき。

すなわち $z^2 = 1$ $z > \frac{1}{3}$ であるから $z = 1$

このとき $z = 3^{\log_{10} x} = 1$ よって $\log_{10} x = 0$

ゆえに $x = 10^0 = 1$

また $5^y = 3z - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ ゆえに $y = \log_{5} 2$