

数学 ・ B 第3問

(1) $a_{n+1} = 3a_n + 60$ を変形すると $a_{n+1} + 30 = 3(a_n + 30)$

よって、数列 $\{a_n + 30\}$ は初項 $a_1 + 30 = -27 + 30 = 3$ 、公比 3 の等比数列であるから

$$a_n + 30 = 3 \cdot 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = 3^n - 30$$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n (3^k - 30) = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - 30n = \frac{3}{2}(3^n - 1) - 30n$$

また、 $S_n > 0$ とすると $\frac{3}{2}(3^n - 1) - 30n > 0$

変形すると $3^n > 20n + 1$ ……

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき、 3^n と $20n + 1$ の値を計算すると、右の表のようになる。

n	1	2	3	4	5
3^n	3	9	27	81	243
$20n + 1$	21	41	61	81	101

ゆえに、 $3^n > 20n + 1$ が成り立つ最小の自然数 n は

$$n = 5$$

したがって、 $S_n > 0$ となる最小の自然数 n は $n = 5$

(2) 条件から $2b_n + c_n = d(n - 1)$ 、 $b_n - 2c_n = xr^{n-1}$

$d(n - 1) = A$ 、 $xr^{n-1} = B$ とおくと

$$2b_n + c_n = A \quad \dots\dots, \quad b_n - 2c_n = B \quad \dots\dots$$

$\times 2 +$ から $5b_n = 2A + B$ よって $b_n = \frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B$

$- \times 2$ から $5c_n = A - 2B$ よって $c_n = \frac{1}{5}A - \frac{2}{5}B$

したがって $b_n + c_n = \left(\frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B\right) + \left(\frac{1}{5}A - \frac{2}{5}B\right) = \frac{3}{5}A - \frac{1}{5}B$
 $= \frac{3}{5}d(n - 1) - \frac{1}{5}xr^{n-1}$

別解 $\times 3 -$ から $5b_n + 5c_n = 3A - B$

よって $b_n + c_n = \frac{3}{5}A - \frac{1}{5}B = \frac{3}{5}d(n - 1) - \frac{1}{5}xr^{n-1}$

(3) 数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{b_n + c_n\}$ の階差数列であるから

$$a_n = b_{n+1} + c_{n+1} - (b_n + c_n) = \frac{3}{5}dn - \frac{1}{5}xr^n - \frac{3}{5}d(n - 1) + \frac{1}{5}xr^{n-1}$$

$$= \frac{3}{5}d + \frac{1}{5}x(1 - r)r^{n-1}$$

これが (1) の $a_n = 3^n - 30$ と同じであるから

$$r = 3, \quad \frac{1}{5}x(1 - r) = 3, \quad \frac{3}{5}d = -30$$

これを解くと $r = 3, \quad x = \frac{-15}{2}, \quad d = -50$

このとき, (2)において, $A = -50(n-1)$, $B = -\frac{15}{2} \cdot 3^{n-1} = -\frac{5}{2} \cdot 3^n$ であるから

$$b_n = \frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B = \frac{2}{5} \cdot \{-50(n-1)\} + \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3^n$$

$$= -\frac{20(n-1)}{1} - \frac{3^n}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{5}A - \frac{2}{5}B = \frac{1}{5} \cdot \{-50(n-1)\} - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3^n$$

$$= -10(n-1) + 3^n$$